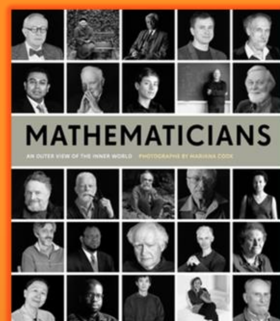
Συλλογή με Μαθηματικές εργασίες



Ανάλυση, Γεωμετρία, Νέες Τεχνολογίες κ. ά.



2 από 6 αρχεία



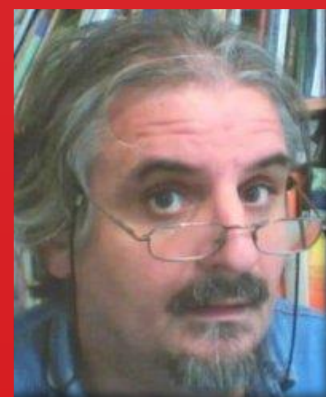
Γιάννης Πλατάρος



Ανθυφαίρεση Ανταναίρεση	Η Ευκλείδεια Γεωμετρία Το άπειρο	Απειροστικός Λογισμός Αντιπαράδειγμα	2015

Διδακτική Μαθηματικών

στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.



Μεσσήνη

ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ.

Γιάννης Π. Πλατάρος Καπετάν Κρόμπα 37, 242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ, ηλ.ταχ. plataros@gmail.com

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, παρουσιάζονται διδακτικά μοντέλα για την διδασκαλία βασικών θεωρημάτων του Απειροστικού Λογισμού. Το αναφορικό νόημα βασικών θεωρημάτων, όπως τα Θεωρήματα Bolzano, Rolle, Μέσης Τιμής διαφορικού λογισμού, Σταθερού σημείου, μπορεί να αναδειχθεί ιδιαίτερα όταν τα θεωρήματα συνδέονται μεταξύ τους, μέσω είτε γεωμετρικών μοντέλων, είτε άλλων προσιτών καθημερινών καταστάσεων. Με αυτό τον τρόπο, γίνονται καλύτερα κατανοητά από τους μαθητές, οι οποίοι διευρύνουν το πλαίσιο αναφοράς τους.

Εισαγωγή

Η αναζήτηση και ανάπτυξη απλών, προσιτών, φυσικών ή μαθηματικών μοντέλων για την κατανόηση μιας έννοιας είναι μια αρχαία και διαρκής ερευνητική διαδικασία ανήσυχων δασκάλων, προκειμένου να αναπτύξουν πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας, ώστε να συμβάλουν στην βαθύτερη κατανόησή της από μέρους των μαθητών. Επίσης η χρήση πρότερων εννοιών στο κτίσιμο μιας άλλης, είναι πασίγνωστη διδακτική πρακτική. Ο Gagne (1970) [8] ανέπτυξε μια νέα –τότε - θεωρία μάθησης, η οποία βασίζεται στην ιδέα ότι οι απλούστερες μαθηματικές δραστηριότητες αποτελούν τα δομικά υλικά για τις πιο πολύπλοκες, οι οποίες -με τη σειρά τους- μπορούν να αναλυθούν στα πιο απλά τους συστατικά. Σε αυτά τα πλαίσια, το «πετυχημένο παράδειγμα» ή μοντέλο που λαμβάνει υπ΄ όψιν του τις υπάρχουσες εμπειρίες των μαθητών και τις αξιοποιεί για το κτίσιμο της νέας έννοιας είναι εκ των ων ουκ άνευ του δάσκαλου των Μαθηματικών. Ειδικά για τους μαθησιακούς στόχους στο νέο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών Α΄ Λυκείου (2011) καταγράφεται ότι:

«...χρειάζεται να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος στην κατανόηση και εμπέδωση των εννοιών μέσα από την ανάπτυξη πολλαπλών αναπαραστάσεων τους, καθώς και τη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων…» και ένας από τους στόχους της διδασκαλίας είναι «…η ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα…»[1]

Στον Απειροστικό Λογισμό, σπουδαία και βασικά του θεωρήματα, διδακτικά πλέον προσεγγίζονται και μέσω της γεωμετρικής τους σημασίας (οπτική αναπαράσταση) Μάλιστα, η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας στο άλλο, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο όχι μόνο για τη μάθηση μαθηματικών εννοιών, αλλά και για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. [7] .Μάλιστα, αυτή η προσέγγιση μπορεί να εμπλουτιστεί και με εμπειρικά φυσικά μοντέλα που παρουσιάζομε παρακάτω.

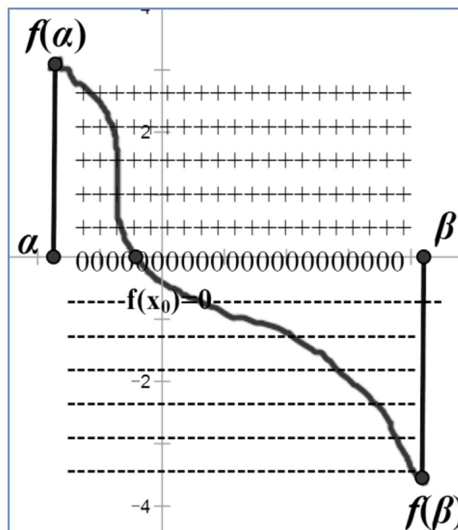
Οι συναρτήσεις κίνησης των σωμάτων

Οι συναρτήσεις κίνησης οιουδήποτε σώματος μάζα, ακόμα και «υλικού σημείου» (που θεωρείται ότι έχει μάζα, αλλά όχι διαστάσεις) υ(t), s(t), a(t) είναι προφανώς συνεχείς συναρτήσεις αφού ορίζονται πάντα σε κάποιο διάστημα $[t_1,t_2]$ και δεν είναι δυνατόν σε μηδενικό χρόνο ένα σώμα να βρεθεί αλλού (λόγω αδράνειας) όπως και σε μηδενικό χρόνο να μεταβάλλει ταχύτητα ή επιτάχυνση. Για τους ίδιους λόγους δεν είναι δυνατόν μια συνάρτηση s(t) να έχει γωνιώδη σημεία, αφού στο γωνιώδες σημείο θα έχουμε δύο διαφορετικές εφαπτόμενες (=δύο διαφορετικές ταχύτητες) σε μηδενικό χρόνο, δηλαδή πεπερασμένη (διανυσματικά) διαφορά ταχύτητας σε μηδενικό χρόνο, πράγμα που συνεπάγεται άπειρη επιτάχυνση, δηλ. τελικά μηδενική μάζα, όπερ άτοπο. Συνεπώς, όλες οι κινήσεις σωμάτων ή σωματιδίων στην Φύση, περιγράφονται με παραγωγίσιμες (και άρα συνεχείς) συναρτήσεις.

Μοντέλα του Θ. Bolzano

Α) «Για να πάω από το ένα ημιεπίπεδο που ορίζει μια ευθεία στο άλλο με μια μονοκονδυλιά πρέπει υποχρεωτικά να τμήσω την ευθεία που τα ορίζει σε ένα τουλάχιστον σημείο.» (Οπτική επικύρωση με ένα απλό σχήμα)

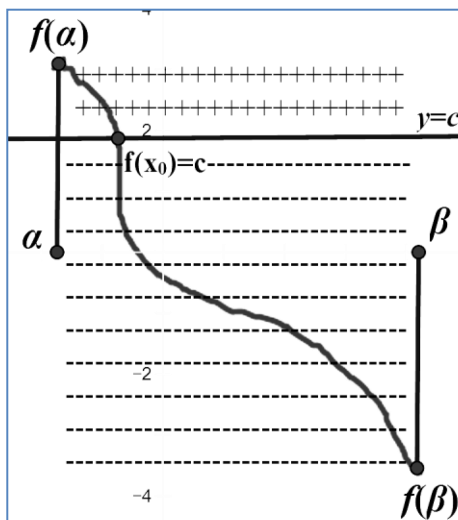
Β) Είμαι στην μία όχθη ποταμού. Δεν μπορώ να πετάξω, δεν μπορώ να κάνω σήραγγα. Κινούμαι σε επίπεδο. Για να περάσω στην άλλη όχθη, πρέπει υποχρεωτικά να διασχίσω το ποτάμι.» Αυτό βεβαίως είναι ένα φυσικό-ατελές μοντέλο, που ενέχει κινδύνους, οι οποίοι όμως, μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά. Λόγου χάριν ο μαθητής μπορεί να πει «θα παρακάμψω τις πηγές» ή «θα πηγαίνω όλο πίσω



__Σχήμα 1:__ Η Αναλυτική- Γεωμετρική θεώρηση του Θ.Bolzano, βλέπει το γ.τ. των σημείων με θετικές τεταγμένες κα ι τον γ.τ. των σημείων με αρνητικές, όπου η συνεχής μετάβαση από το ένα ημιεπίπεδο στο άλλο, θα μας δώσει μία τουλάχιστον τεταγμένη ίση με 0.

κάθετα στην διεύθυνση του ποταμού, θα κάνω τον κύκλο της Γης και θα…φθάσω στην άλλη όχθη!» Ο καθηγητής δύναται να αναφερθεί σε ποτάμι με ιδιότητες ευθείας, σε επιφάνεια σφαίρας όπως είναι η Γη, αν υπάρχει. Μπορεί να γίνει σχολιασμός του μέγιστου κύκλου σφαίρας, όπου είναι αντικείμενο μιας διάστασης χωρίς αρχή και τέλος, άρα προσομοιάζει με την ευθεία στην επίπεδη εκδοχή της, που ουσιαστικά αναδεικνύει την ισχύ της απλής ιδέας του Θ. Bolzano και στην Σφαιρική (Διπλή Ελλειπτική) Γεωμετρία.

Γ) Αναγνώριση ότι η ευθεία με εξίσωση y=0 τέμνεται από την γραφική παράσταση της *f*(x) . Μερική γενίκευση με θεώρηση της ευθείας y=c, όπου η γνωστή

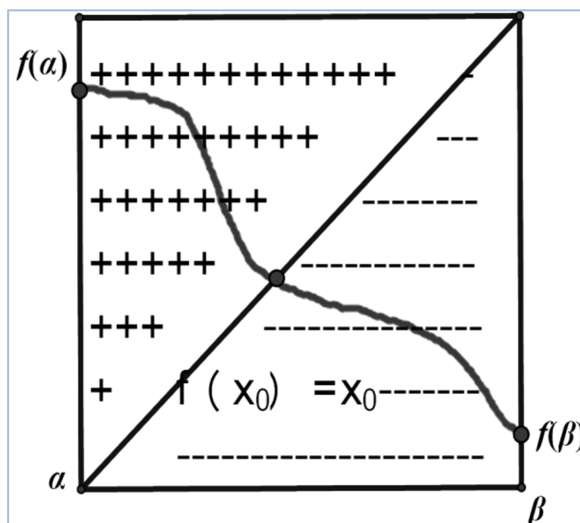


__Σχήμα 2__: Μία γενίκευση του Θ. Bolzano, θεωρεί αντί την ευθεία y=0, την ευθεία y=c, όπου η γνωστή συνθήκη f(α)f(β)<0 γίνεται (f(α)-c)(f(β)-c)<0, δεν είναι γόνιμη από μαθηματική άποψη, καθώς τα προβλήματα ύπαρξης λύσεως σε εξίσωση, αντιμετωπίζονται με το κανονικό

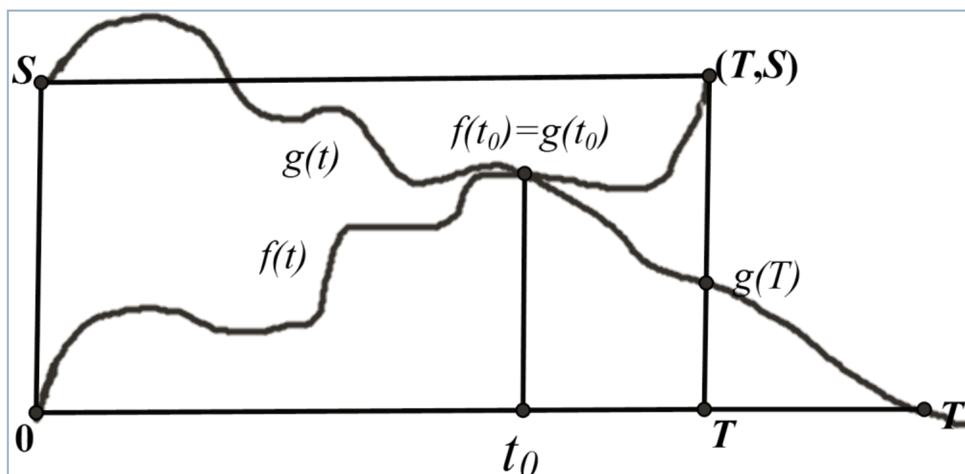
συνθήκη $f(\alpha)f(\beta)<0$ μετατρέπεται σε $(f(\alpha)-c)(f(\beta)-c)<0$. Η γεωμετρική θεώρηση ότι πάνω από την y=c, έχω θετικές τιμές για την παράσταση $f(\alpha)$-c και αρνητικές για την $f(\beta)$-c. (*βλέπε σχήμα 2*) Τελικά η διαπίστωση, ότι η γενίκευση αυτή, δεν είναι γόνιμη ως προς την αντιμετώπιση προβλημάτων, αφού αν θέλουμε να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής $f(\chi)=c$, δεν προσφεύγουμε σε μια γενίκευση του Θ. Bolzano, αλλά θεωρούμε την συνάρτηση g(x)=f(x)-c και εφαρμόζουμε την γνωστή μορφή του θεωρήματος. Περεταίρω γενίκευση μπορεί να δώσει το Θ. Σταθερού Σημείου.

Θ. Σταθερού Σημείου (Θ. Brower)

« Αν f : [α,β]→[α,β] συνεχής, τότε υπάρχει $\chi_0 \in [\alpha,\beta]$: $f(\chi_0)=\chi_0$.» Αυτή η απλή μορφή του Θεωρήματος παρουσιάζεται στο Λύκειο ως άσκηση, η οποία λύνεται αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ και εφαρμόσω το Θ. Bolzano. (Βλέπε σχήμα 3) Εκ πρώτης όψεως φαίνεται κι αυτή μια «μη γόνιμη» επέκταση του Θ. Bolzano, αλλά η σημασία του είναι μεγίστη, καθώς εκτός από το ότι μπορεί να αποδειχθεί αυτοτελώς, έχει την δική του σημειολογία στην ανεύρεση σταθερών σημείων στις Γεωμετρικές και ιδίως τις Τοπολογικές απεικονίσεις, στην ανάπτυξη προσεγγιστικών επαναληπτικών μεθόδων, όπου ιδίως στην μέθοδο Νεύτωνα, αναζητούμε μοναδική λύση σε συστολή συνάρτησης [5] Επίσης, στην θεωρία Παιγνίων του Nash, στις διαφορικές εξισώσεις, αλλά και στην Οικονομία (Θεώρημα Αδυνάτου του Arrow [4]) Αν μάλιστα γενικευθεί σε πλήρεις Μετρικούς Χώρους, δίνει το περίφημο Θ. Σταθερού Σημείου του Banach.



Σχήμα 3: *Εδώ, πάνω από την διαγώνιο του τετραγώνου έχουμε τεταγμένη-τετμημένη, θετική τιμή, μηδέν στην διαγώνιο και αρνητική κάτω.*



Σχήμα 4*: Ο Μοναχός ξεκινά από το σημείο 0 και κάνοντας την διαδρομή με διαφορετικές ταχύτητες, στάσεις, ακόμα και οπισθοπορεία, μετά από χρόνο Τ, φθάνει στον προορισμό του, σε απόσταση S. Η κίνησή του, περιγράφεται με την συνάρτηση f(t). Ένα φανταστικό ομοίωμα του εαυτού του, που ξενικά την ίδια ώρα από τον προορισμό προς την αφετηρία (στο σχήμα ξεκινά για λίγο με οπισθοπορεία) Τελικά είναι διαισθητικά βέβαιο, υπό εύλογες προϋποθέσεις, να το συναντήσει σε ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής.*

Η εποπτική παράθεση και κατανόηση των σχημάτων 1,2και 3, επάγει την γενίκευση που φαίνεται στο σχήμα 4 . Μάλιστα γι αυτή την γενίκευση, υπάρχει μια ενδιαφέρουσα ιστορία –πρόβλημα με έναν βουδιστή μοναχό. Σύμφωνα με αυτήν, ο μοναχός ξεκινά από την θέση Α και κατευθύνεται προς ένα ναό στη κορυφή ενός βουνού. Δεν κρατάει σταθερό βηματισμό και κάνει διάφορες στάσεις, ανάλογα με την επιθυμία του να διαλογιστεί. Κάποια στιγμή σταματάει να πιει νερό σε μια πηγή και παρατηρεί ότι η σκιά ενός δέντρου πέφτει ακριβώς στο ρυάκι του νερού.
Τη νύχτα φτάνει στο ναό διανύοντας διάστημα S (σημείο Β) και το ξημέρωμα ξεκινάει το ταξίδι του γυρισμού. Περνώντας μπροστά από την πηγή, διαπιστώνει ότι το δέντρο ρίχνει τη σκιά του ακριβώς στο ρυάκι του νερού και συμπεραίνει ότι συνέβη μια εκπληκτική σύμπτωση: Τόσο όταν πήγαινε όσο και όταν γυρνούσε, πέρασε από την πηγή ακριβώς την ίδια ώρα.» [2],[3] Μάλιστα για να το αποδείξει νοητικά, έκανε την εξής υπερβατική σκέψη: Αν ένα αντίγραφο του εαυτού μου, ξεκινούσε την ίδια ώρα από Μοναστήρι και ακολουθούσε την αντίστροφη πορεία, κάποια στιγμή θα με συναντούσε. Εκείνη την στιγμή θα ήταν η ίδια ώρα και το μέρος θα ήταν το ζητούμενο. Η καθαρά μαθηματική προσέγγιση, λέει ότι έχουμε δύο τυχαίες συναρτήσεις κίνησης:

Την f(t), ορισμένη στο [0,T] με f(0)=0 και f(T)=S και την g(t),ορισμένη στο [0,T΄], με g(0)=S>0, g(T΄)=0. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση h(t)=g(t)-f(t) στο [0,T] θεωρώντας ότι T΄>T, θα είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και εξετάζοντας την δυνατότητα εφαρμογής του Θ. Bolzano, έχουμε h(0)=g(0)-f(0)=S. h(T)=g(T)-f(T)=g(T)-S, οπότε αν (όπως φαίνεται στο σχήμα 4) g(T)-S<0, τότε πληρούται η συνθήκη του Θ.Bolzano h(0)h(T)<0, άρα υπάρχει t_0 : $h(t_0)=0$, δηλ. $g(t_0)-f(t_0)=0$ ή $g(t_0)=f(t_0)$, ισότητα που δηλώνει την ύπαρξη μίας τουλάχιστον στιγμής (t_0) όπου συναντάται στο ίδιο μέρος της διαδρομής του δρόμου. Αν T΄ <T, ή T=T΄ προφανώς ισχύει το ίδιο συμπέρασμα.

Θεώρημα Rolle

Α) « Θέλω να πάω από ένα σημείο Α σε ένα ισοϋψές σημείο Β. Αν πάω από το Α στο Β οριζόντια, έχει καλώς. Αν ξεκινήσω με ανοδική πορεία, σε κάποια φάση της διαδρομής θα χρειαστεί να κάνω καθοδική. Πριν κάνω την καθοδική, έστω και για μια στιγμή, θα κινηθώ οριζόντια. Αν ξεκινήσω καθοδικά, θα χρειαστεί μετά να πάω ανοδικά. Πριν πάω ανοδικά, έστω και για μια στιγμή, θα κινηθώ οριζόντια. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, όπως και να πάω από το Α στο ισοϋψές Β, θα κινηθώ έστω και για μια στιγμή, οριζόντια. Σε τροχιές που έχουν γωνιώδη σημεία δεν συμβαίνει πάντοτε αυτό. (Σχεδιαστικό παράδειγμα στον πίνακα)

Β) «Πετάω μια πέτρα κατακόρυφα. Ανεβαίνοντας κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση με σταθερή επιβράδυνση g και κατεβαίνοντας επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση g. Πριν κατέβει η πέτρα για μια στιγμή t_0 θα σταματήσει. Τότε θα έχει ταχύτητα 0 . Η Ταχύτητα όμως είναι η πρώτη παράγωγος της εξίσωσης κίνησης. Δηλ. $S΄(t_0)=0$. Την στιγμή t_0, έχω ακρότατο της συνάρτησης και συγκεκριμένα μέγιστο. Μάλιστα, λόγω και αυτού του προβλήματος κατακόρυφης βολής, που εξέταζε ιστορικά στα πρώτα του βήματα ο Απειροστικός Λογισμός, το σημείο ονομάστηκε «στάσιμο» μια ορολογία που χρησιμοποιείται ακόμα για τα ακρότατα συνάρτησης.»

Γ) (Γενίκευση στο προηγούμενο) Κινητό εκκινεί από σημείο Α και κάνοντας οποιαδήποτε διαδρομή στον χώρο, με οποιαδήποτε συνάρτηση ταχύτητας, ξαναγυρνά στο ίδιο σημείο Α. Αν S(t) είναι το μήκος του της απομάκρυνσης από το Α (μήκος διανύσματος θέσης) είναι βέβαιο, ότι υπάρχει μία τουλάχιστον στιγμή, όπου σταματά να απομακρύνεται όπου θα φθάσει στο μέγιστο σημείο απομάκρυνσης από το Α, πριν επιστρέψει σε αυτό. Εκεί έχει ταχύτητα 0, δηλ. S΄(t)=0.

Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.

Α) Ξεκινάω από ένα σημείο Α και θέλω να πάω σε ένα σημείο Β. Αν πάω από το Α κατ΄ ευθείαν και συνεχώς στην κατεύθυνση AB (κλίση του AB), θα φθάσω στο

Β. Αν πριν φθάσω στο Β κατευθυνθώ σε μεγαλύτερη κλίση από την AB, δεν θα φθάσω ποτέ στο Β αν δεν κινηθώ και σε κλίση μικρότερη από AB . Πριν κινηθώ σε κατεύθυνση μικρότερη, έστω και για μια στιγμή θα κινηθώ σε κλίση ίση με AB. Το ίδιο αν κινηθώ σε μικρότερη, όπου θα αναγκαστώ να κινηθώ κάποια στιγμή σε μεγαλύτερη και πριν κινηθώ σε μεγαλύτερη θα κινηθώ έστω και για μια στιγμή σε ίση. Ο καθηγητής μπορεί να φτιάχνει και σχετικό σχήμα με βασικό πειστικό επιχείρημα, ότι η κίνηση συνεχώς σε μεγαλύτερη ή μικρότερη κλίση δεν οδηγεί ποτέ στο Β.

Β) Ένα αυτοκίνητο, διανύει την απόσταση ΑΒ=300Km, με σταθερή ταχύτητα 100Km/h και φυσικά χρειάζεται 3h για να την διανύσει. Αν κάποια στιγμή κινηθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη από 100Km/h έχοντας την απαίτηση να φθάσει πάλι σε 3h, θα χρειαστεί να πάει κάποιο διάστημα με μικρότερη ταχύτητα από 100Km/h. Πριν κινηθεί με μικρότερη ταχύτητα, έστω και για μια στιγμή το ταχύμετρο θα περάσει και από την ένδειξη 100Km/h. Ομοίως και αν κινηθεί και με ταχύτητα μικρότερη από 100Km/h, όπου θα χρειαστεί να πάει με μεγαλύτερη αν θέλει να φθάσει στις 3h και έστω και για μια στιγμή θα πάει με 100Km/h .

Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού

Κινητό κινείται σε μια διαδρομή με μεταβαλλόμενη ταχύτητα που δίνεται από την συνάρτηση υ(t), διανύοντας συνολικά διάστημα S σε χρόνο T. Αν κινηθεί με (σταθερή) ταχύτητα S/T για τον ίδιο χρόνο T, θα διανύσει διάστημα (S/T)T=S. Δηλαδή θα διανύσει το ίδιο διάστημα στον ίδιο χρόνο. Φυσικά δίνεται και η γνωστή γεωμετρική ερμηνεία με τα εμβαδά στο διάγραμμα υ(t). Επίσης, μπορεί και πρέπει να προηγηθεί η πιο απλή περίπτωση της κίνησης με σταθερή επιτάχυνση, όπου από το γνωστό διάγραμμα α=ct, μεταβαίνουμε με ολοκλήρωση στην συνάρτηση υ(t)=αt και με μια επί πλέον ολοκλήρωση στην $S(t)=\frac{1}{2}\alpha t^2$

Συμπεράσματα

Η διασύνδεση των ήδη κατεχόμενων εννοιών της κίνησης με τις έννοιες της Ανάλυσης μέσα από την μαθηματική θεώρηση των μοντέλων, προάγει την αποτελεσματικότερη κατανόησή των εννοιών, στα γνωστά πλαίσια παροχής πολλαπλής αναπαράστασης των εννοιών κατά την διδασκαλία τους. Άρα πρέπει να παρουσιάζονται και τέτοια μοντέλα κατά την αντίστοιχη διδασκαλία των παραπάνω βασικών θεωρημάτων του Απειροστικού, στο Λύκειο. Τα γεωμετρικά μοντέλα των θεωρημάτων

αποτελούν αφετηρίες για γενικεύσεις, πράγμα εξαιρετικά δύσκολο από την συμβολική του διατύπωση. Για παράδειγμα στο Θ. Rolle έχουμε ισοϋψή σημεία, τι γίνεται αν είναι ανισοϋψή; (Θ . Μέσης Τιμής) Στο Θ.Bolzano, η ευθεία την οποία τέμνει η f(x), έχει εξίσωση y=0. Τι γίνεται αν έχω εξίσωση y=c, y=x (Θ.Brower) y=αx, γενικώς y=f(x); Το γνωστό θέμα της μη επάρκειας του χρόνου για την αποτελεσματική ολοκλήρωση της διδακτέας ύλης, πρέπει να σταθμιστεί με το κριτήριο της αποτελεσματικής-χρηστικής κατανόησης των εννοιών, καθώς και με την έμφαση που δίνουν πλέον τα νέα ΑΠΣ σε αυτό.

Ο Απειροστικός Λογισμός δημιουργήθηκε από την ανάγκη αποτελεσματικής μελέτης προβλημάτων ρυθμού μεταβολής που δεν μπορούσε να αντιμετωπίσει η κλασική Άλγεβρα ή η Γεωμετρία. Τα πρώτα προβλήματα ήταν τα προβλήματα κίνησης της Φυσικής. Αν μάλιστα λάβουμε υπ΄ όψιν μας και δεχθούμε ότι ο γνωστός βιογενετικός νόμος μάθησης («η οντογένεση είναι μια γρήγορη επανάληψη της φυλογένεσης – εξέλιξης») [6] σχετίζεται (όπως κάποιοι εικάζουν) με την ιστορική εξέλιξη των επιστημών, άρα και με την βέλτιστη σειρά από πλευράς φυσικής μαθησιακής ετοιμότητας, σύμφωνα με την οποία θα πρέπει να παρουσιάζονται οι έννοιες, τότε η παρουσίαση και έμφαση στην διδασκαλία του Απειροστικού των μοντέλων κίνησης, είναι πιθανότατα προς την σωστή κατεύθυνση της αποτελεσματική διδασκαλίας.

Βιβλιογραφικές και Διαδικτυακές Αναφορές

[1] **Πρόγραμμα Μαθηματικών Α΄ Τάξης Λυκείου** (ΦΕΚ 1168/2011 - Αριθμ. 59614/Γ2) Διαθέσιμο σε http://edu.klimaka.gr/nomothesia/fek/1377-fek-1168-2011-programma-spoudes-algebra-gewmetria-a-lykeiou.html (τελευταία πρόσβαση 31/8/2011)

[2] http://neadiastasi.blogspot.com/2009/10/blog-post.html (τελευταία πρόσβαση 31/8/2011)

[3] http://dorigo.wordpress.com/2006/02/15/solution-to-the-ubiquitous-monk-problem/ (τελευταία πρόσβαση 31/8/2011)

[4] : http://users.uoi.gr/kammas/economic_policy_2.pdf (τελευταία πρόσβαση 31/8/2011)

[5] **Κυριακόπουλος Γεώργιος** Διπλωματική Εργασία «Το Θεώρημα του Σταθερού Σημείου και Διδακτικές Εφαρμογές» Διαθέσιμο σε: http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_kyriakopoulos.pdf (τελευταία πρόσβαση 10/9/2011)

[6] **Αλαχιώτης Σ.Ν.** Μια νέα θεωρία μάθησης-Βιοπαιδαγωγισμός Διαθέσιμο σε: http://www.alfavita.gr/artra/art13_12_08_1439.php (τελευταία πρόσβαση 31/8/2011)

[7] **Janvier, C.** (1987). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

[8] **Gagné, R. M**. (1970). *The conditions of learning*. 2nd edition. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Δύο Εφαρμογές της Εις Άτοπον Απαγωγής σε δύο απλά Θέματα Φυσικής

Γιάννης Π. Πλατάρος
Μαθηματικός

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: Οι εξειδικεύσεις, δημιουργούν διακριτές κουλτούρες και στεγανά μεταξύ των Επιστημών. Διακριτές μελέτες και μέθοδοι έρευνας, επιτείνουν τις διαφορές. Το ενοποιόν χάνεται, ξεχνιέται. «Εμείς είμαστε πειραματική Επιστήμη, εσείς θεωρητική» Κάπου εκεί, στον κοινό άνθρωπο χάνονται και τα όρια. Πρωταρχικά, λίαν βασικά ερωτήματα, δεν απαντώνται. Παράδειγμα: «Γιατί το μήλο πέφτει κάτω από την μηλιά;» Απάντηση: «Δεν υπάρχει καμία απάντηση!» Εκεί ~~επιφανεια~~ η επιφανειακή και η ρηχή σκέψη, επαναστατούν! «Και ο νόμος του Νεύτωνος τι είναι;» Δεν δίνει απάντ

απάντηση;» Ο τύπος $F = k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ δεν τα λέει όλα;» Και βέβαια, ο νόμος της Παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνος λέει το «πώς» και δεν λέει, αποσιωπά, δεν εξηγεί δεν διευκρινίζει το «γιατί». Το «γιατί» (= διότι) είναι η εξήγηση η επαρκής που είναι ζητούμενο από όλες τις επιστήμες ή τουλάχιστον πρέπει να είναι. Οι χιλιάδες παρατηρήσεις και τα χιλιάδες πειράματα φτιάχνουν «στατιστικούς νόμους» που είναι «λογικό» να έχουν και τις «εξαιρέσεις τους» οπότε αναθεωρείται και ο «νόμος». Και βέβαια, δεν θα διολισθήσουμε σε επιστημολογικούς δρόμους αφού το αντικείμενο είναι άλλο. Απλώς όμως επιμένουμε, ότι στην διδασκαλία της Φυσικής, θα πρέπει να διευκρινίζεται ότι άλλο το «πώς» και άλλο το «γιατί». Άλλο το πώς έλκονται δύο σώματα που έχουν μάζα και άλλο το <u>γιατί έλκονται</u>. Γιατί όταν τινάζω με ταχ[illegible] ότις τις παλάμες μου για να στεγνώσουν τα χέρια μου, η Σελήνη αντιλαμβάνεται «βαρυτικά κύματα»

με την ταχύτητα του φωτός! Άραγε και εγώ ως υποκείμενος μάζας «καταλαβαίνω» την κίνηση της Σελήνης ή πάντων των εμβίων ή μη κινουμένων όντων του Πλανήτη;

Τι θα μπορούσα να «καταλάβω»;» Μήπως υπάρχει «καταστολή αντίληψης» και όλα αυτά είναι αφελητέα; Μήπως όμως αυτό έχει να κάνει με «συνειδητό» και «ασυνείδητο;» Οι Αρχαίοι Έλληνες θα αναζητούσαν απαντήσεις. Ας... είναι (!) διότι μάκρυνε ο πρόλογος!

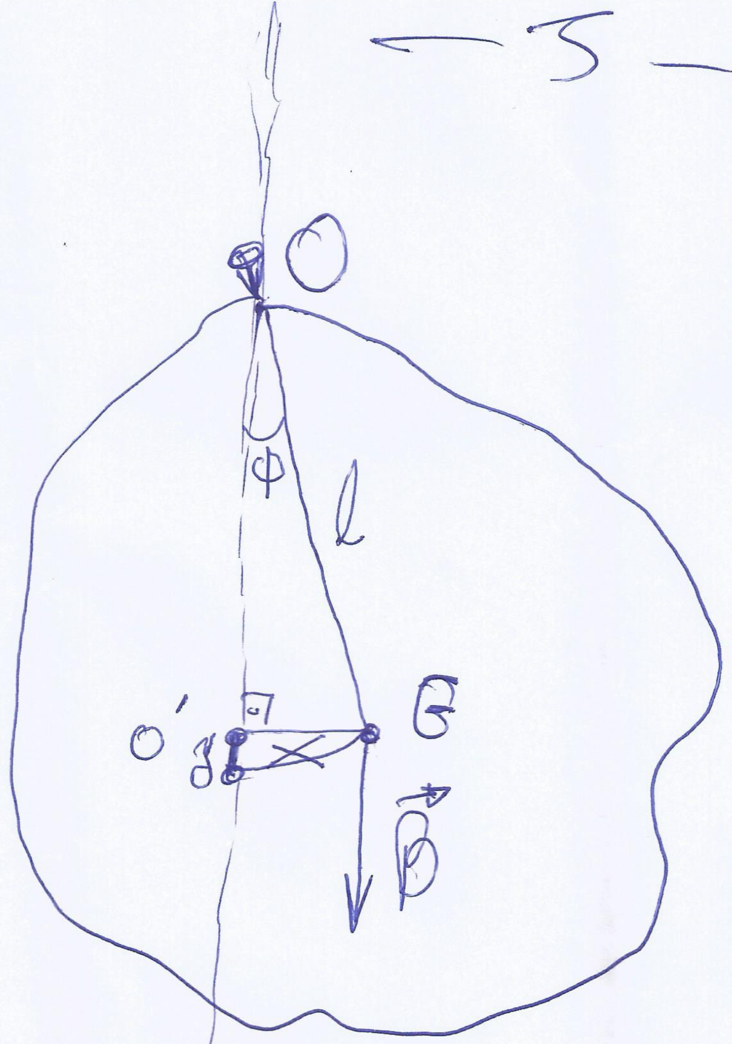
ΘΕΜΑ 1ον «Αν κρεμάσουμε ένα οποιοδήποτε υλικό σώμα από ένα μόνο σημείο, ή νήμα, ~~και~~ το σώμα ηρεμεί, τότε η κατακόρυφος που διέρχεται από το σημείο ανάρτησης, διέρχεται και από το κέντρο Βάρους (Μάζας) του σώματος. Αν μάλιστα αναρτήσουμε το σώμα από διαφορετικά σημεία, όλες οι κατακόρυφες θα διέρχονται από το Є, επομένως φθάνουν θεωρητικώς δύο αναρτήσεις για να προσδιορίσουμε το Є

ενός υλικού σώματος, ιδίως όταν το σώμα είναι ανομοιογενές, χωρίς γνωστή κατανομή πυκνότητος και η συμμετρία είτε η ανάλυση σηκώνουν ψηλά τα χέρια! Το πείραμα μοιάζει ως μοναδική οδός. (Μπορεί να υπάρχουν και άλλες μέθοδοι, σίγουρα πιο πολύπλοκες)

Το ερώτημα:

« Γιατί η κατακόρυφος περνά από το Θ; »

Απάντηση: Διότι εάν δεν περνούσε, τότε το βάρος B του σώματος, ως προς το σημείο ανάρτησης O, θα δημιουργούσε μια ροπή δυνάμεως M = Bημφ × l, η οποία θα δημιουργούσε κίνηση, αφού το σώμα όμως ακινητεί πρέπει να δεχθούμε ότι M = 0 και επειδή B ≠ 0 ημφ = 0 ή l = 0 ή όπερ το αυτό, το G ανήκει στην κατακόρυφο που διέρχεται από το O.



(κατακόρυφος

● Υπάρχει η ροπή ως προς O $M = B \cdot x$ που προκαλεί στρέψη (ταλάντωση) επειδή $B \neq 0$, πρέπει $x = 0$, πράγμα που συμβαίνει όταν το G είναι σημείο της OO΄

● (Υπάρχει και η προσέγγιση με τις ταχυτότητα $F = -Dx$, αλλά είναι πιο σύνθετο)

● Υπό ενεργειακή οπτική, με την δεξιά απόκλιση το σώμα αποκτά δυναμική ενέργεια $E = B \cdot y$ και αφού δεν υπάρχει εμπόδιο στην κίνηση, θα γίνει κινητική. Αφού δεν κινείται πρέπει $By = 0$ και επειδή $B \neq 0$, έχω $y = 0$.

ΘΕΜΑ 2ο: Το φυσικό μέγεθος «Παροχή»

$\Pi = \frac{dV}{dt}$, όπου dV ο όγκος παροχετευόμενου υγρού σε αγωγό σε χρόνο dt, είναι σταθερό σε όλο το μήκος της ροής στον αγωγό, εάν θεωρήσουμε κάθετο επίπεδο στην διεύθυνση της ροής και τον όγκο του υγρού που διέρχεται εξ αυτού»

Γιατί όμως «η Παροχή είναι σταθερή;»

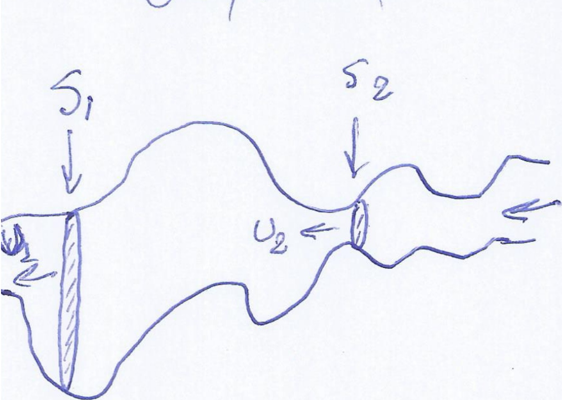
Απάντηση: Εάν δεν ήταν σταθερή ανά κάθετη τομή κατά μήκος της ροής θα ήταν διάφορη. Επομένως

α) Αν $\Pi_1 > \Pi_2$ συνεχώς, τότε προϊόντος του χρόνου στο διάστημα αγωγού μεταξύ Π_1 και Π_2 θα είχε περισσότερη εισροή παρά εκροή.

Αποτέλεσμα ή ο σωλήνας να σπάσει (δεδομένου ότι τα υγρά είναι ασυμπίεστα) ή να παρατηρείται ~~εκ~~ροή.
Επειδή τα ανωτέρω ΔΕΝ παρατηρούνται, έχουμε άτοπο.

β) Αν $\Pi_1 < \Pi_2$ τότε ομοίως, προϊόντος του χρόνου θα είχαμε άδειασμα του ενδιάμεσου τμήματος του σωλήνα, χωρίς να έχουμε διαρροή, ~~και~~ πράγμα που δεν παρατηρείται, άρα άτοπον.

Από α) και β) υποχρεωτικά πρέπει να δεχθούμε ότι $\Pi_1 = \Pi_2 \Leftrightarrow$



$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dS_1 \cdot h_1}{dt} = \frac{dS_2 h_2}{dt}$$

(S_1, S_2 σταθερές διατομές ~~και~~ ~~σταθερά~~)

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} = S_2 \frac{dh_2}{dt} \Leftrightarrow$$

$$S_1 u_1 = S_2 u_2$$

κλπ

Σχόλια — Παρατηρήσεις — Αποτελέσματα

1) Οι Μαθηματικοί το λένε «αλλιώς» παρ' ότι έχουν φοιτήσει στην ίδια Σχολή (Φυσικομαθηματική του παλαιού ή Θετικών Επιστημών του νυν) παρ' ότι είχαν κοινά μαθήματα και κοινούς καθηγητές (έστω λίγους)
Η κρατούσα κουλτούρα διαφοροποιεί την οπτική. (Μαθηματικά αποδείγματα για την Φυσική — Φυσικά προσομοιώματα για την Λογική των Μαθηματικών)

2) Η ενοποιητική προσπάθεια μπορεί να είναι και μόνη η υπόμνηση της διάκρισης των διαλέκτων των μοντέλων. ——

Εικόνες τάξης και χάους σε διερεύνηση ιδιοτήτων ποδικού τριγώνου, μέσω δυναμικού Γεωμετρικού εργαλείου.

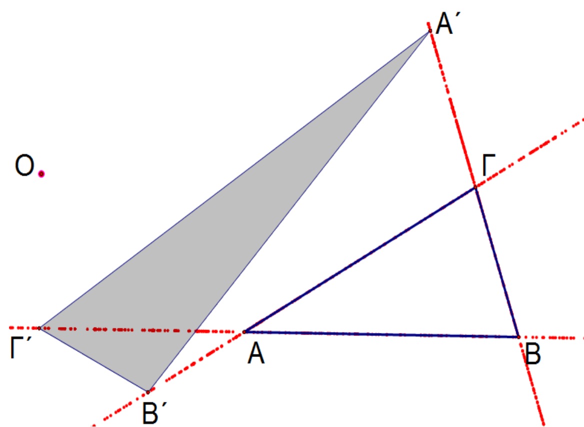
Θεματική Ενότητα 3η Πρακτικές και καινοτομίες στην εκπαίδευση και στην έρευνα

Γιάννης Π. Πλατάρος Μαθηματικός, Καπετάν Κρόμπα 37, 24200 ΜΕΣΣΗΝΗ, plataros@gmail.com

Abstract: The investigation of simple mathematical statements in a traditional way, in many cases, it is practically impossible. There are now accessible educational math software tools to rapidly explore mathematical statements that can not be performed in the traditional way of working. At the same time, shifts the focus on the discovery of mathematical knowledge in a playful way.

Περίληψη: Η έρευνα των απλών μαθηματικών καταστάσεων με παραδοσιακό τρόπο, σε πολλές περιπτώσεις, είναι πρακτικά αδύνατη. Υπάρχουν πλέον προσιτά εκπαιδευτικά εργαλεία λογισμικού μαθηματικών για την ταχεία διερεύνηση μαθηματικών καταστάσεων, που δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν με τον παραδοσιακό τρόπο εργασίας. Την ίδια στιγμή, μετατοπίζεται το ενδιαφέρον στην ανακάλυψη της μαθηματικής γνώσης, με παιγνιώδη τρόπο.

Εισαγωγή: Το ποδικό τρίγωνο, ορίζεται ως εξής: Έχω ένα δεδομένο τρίγωνο και ένα σημείο του επιπέδου του, το Ο. Από το Ο, φέρω τις καθέτους στους φορείς των πλευρών του τριγώνου και θεωρώ τους τρεις πόδες των καθέτων οι οποίοι ορίζουν ένα τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ (το σκούρο) που καλείται «ποδικό τρίγωνο». Μια γνωστή ειδική περίπτωση ποδικού τριγώνου είναι το «ορθικό τρίγωνο» που ορίζεται από τους

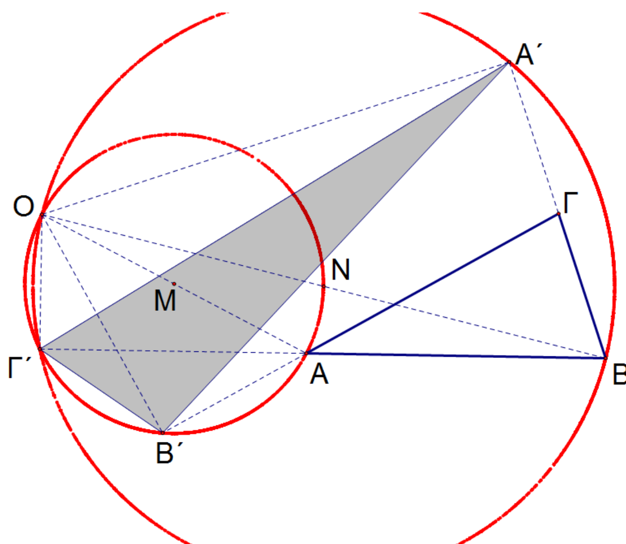


Σχ. 1

πόδες των υψών παντός τριγώνου, όπου τότε το «σημείο του επιπέδου» είναι το ορθόκεντρο, ενώ και όλα τα χαρακτηριστικά σημεία του τριγώνου έχουν τα αντίστοιχα ποδικά τους τρίγωνα με ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Ο χειρισμός του δυναμικού Γεωμετρικού εργαλείου, εδώ του Sketchpad, είναι για να ανακαλύπτει τις δυναμικές ιδιότητες του σχήματος, πιο συγκεκριμένα τους γεωμετρικούς τόπους. Καθώς ο κατασκευαστής του σχήματος «παίζει» πειραματιζόμενος με την κίνηση, ανακαλύπτει αμέσως την πρώτη προφανή ιδιότητα του σχήματος:

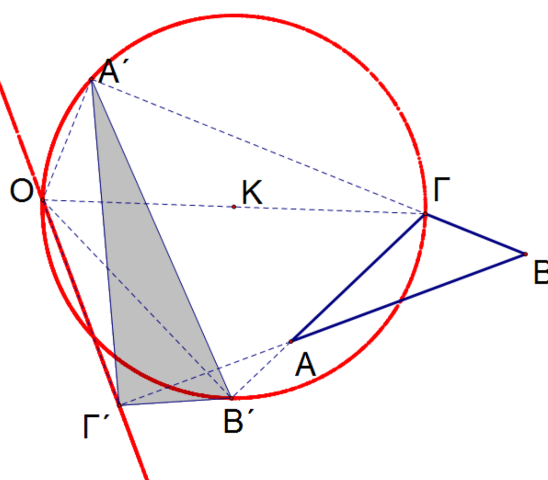
1. Καθώς το Ο κινείται οπουδήποτε στο επίπεδο, το ποδικό Α΄Β΄Γ΄ κινείται έτσι ώστε οι κορυφές του να ευρίσκονται πάντα στους φορείς των πλευρών του αρχικού τριγώνου ΑΒΓ. (Σχ. 1) Η ιδιότητα αυτή είναι στο γνωστικό πεδίο του προφανούς, αρκεί να συνειδητοποιηθεί η ίδια η κατασκευή.
2. Καθώς το Γ κινείται οπουδήποτε στο επίπεδο, το Γ΄ μένει σταθερό, ενώ τα Α΄ και Β΄ κινούνται επί δύο κύκλων που διέρχονται από το Ο και το Γ΄. (Σχ.2) Εδώ φαίνεται απαρχή ανακάλυψης πρότασης (ισχυρή εικασία) και η οποία θέλει απόδειξη. Πράγματι· ισχύει ότι ΟΓ΄ ⊥ ΑΒ, ΟΒ΄⊥ ΑΓ και ΟΑ΄⊥ΒΓ εκ κατασκευής του σχήματος και αφού τα Β΄ , Γ΄ βλέπουν το ΟΑ με ορθή γωνία, τα Ο,Α, Β΄, Γ΄ είναι ομοκυκλικά και το κέντρο του κύκλου είναι στο μέσον Μ του ΟΑ.



Σχ. 2

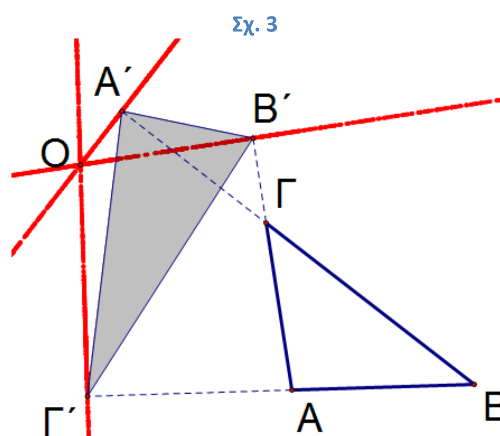
3. Ομοίως η δικαιολόγηση για τον μεγαλύτερο κύκλο που έχει κέντρο το μέσον Ν του ΟΒ.
4. ΜΝ=// $\frac{AB}{2}$ και ΜΑ=$\frac{AB}{2}$ και ΑΝ μεσοκάθετος του ΟΒ, είναι κάποιες άλλες παρατηρήσεις που μπορούν να εξαχθούν αμέσως από το σχήμα.
5. Όταν το Γ γίνεται σημείο των κύκλων, τότε αρχικό και ποδικό τρίγωνο αποκτούν κοινό φορέα (άμεση εξήγηση από την κατασκευή)

6. Όταν το ΑΒ κινείται παραλλήλως προς τον εαυτό του διατηρώντας σταθερό το μέγεθός του, τα Α΄, Β΄ φαίνονται να κινούνται επί κύκλου ενώ το Γ΄ επί ευθείας κάθετης στην ΑΒ από το Ο. Είμαστε δηλαδή προ μιας παρατηρήσεως, που επάγει σε ανακάλυψη μιας πρότασης και η οποία χρειάζεται αιτιολόγηση-απόδειξη. Πράγματι, η ΟΓ είναι η διάμετρος του κύκλου, αφού το Α΄ βλέπει την ΟΓ υπό ορθή γωνία (εκ κατασκευής) Επίσης η ΑΒ, κινείται συνεχώς κάθετα στην σταθερή διεύθυνση ΟΑ΄ (Σχήμα 3)



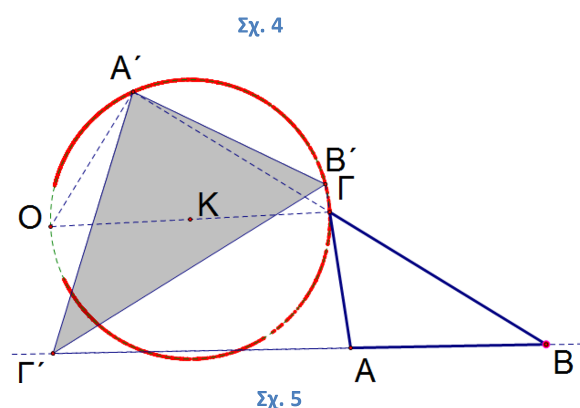
Σχ. 3

7. Καθώς το αρχικό τρίγωνο κινείται οπουδήποτε στο επίπεδο παράλληλα με τον εαυτό του, οι κορυφές του ποδικού κινούνται επί τριών ευθειών που διέρχονται από το Ο και είναι κάθετες στις πλευρές του αρχικού. Η παρατήρηση ότι οι κάθετες στις πλευρές του αρχικού από το σταθερό σημείο Ο συνιστούν σταθερές διευθύνσεις αρκεί για την αιτιολόγηση. (Σχήμα 4)



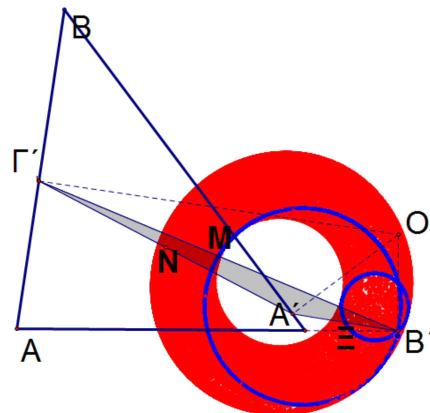
Σχ. 4

8. Καθώς το ΑΒ κινείται επί του φορέα του, (σχήμα 5) χωρίς αναγκαστικά να έχει και σταθερό μήκος, και το Γ σταθερό, τότε τα Α΄ και Β΄ κινούνται επί κύκλου με διάμετρο το σταθερό τμήμα ΟΓ. Η εξήγηση τεκμαίρεται με την παρατήρηση, ότι τα Α΄ και Β΄ βλέπουν το ΟΓ υπό ορθή γωνία, εκ κατασκευής. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μη διαγραφή ολόκληρου του κύκλου από το



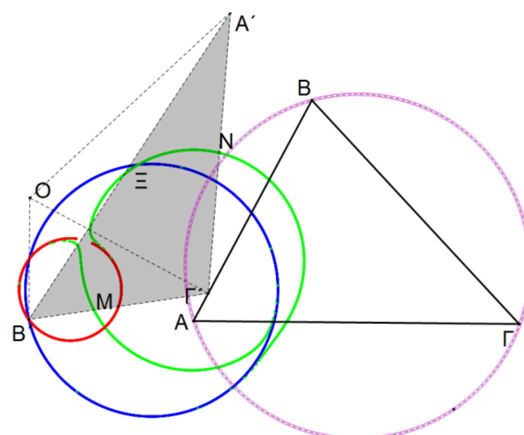
Σχ. 5

Α΄ καθώς αυτό τείνει στο Ο όταν το Β τείνει στο άπειρο της απόστασης εκατέρωθεν του φορέα του ΑΒ. Εμπλέκεται ο παρατηρητής δηλαδή, με απειροστικές διαδικασίες από γεωμετρική οδό, κάτι που παρατηρείται συχνά σε διερευνητικές διεργασίες με τα δυναμικά λογισμικά.

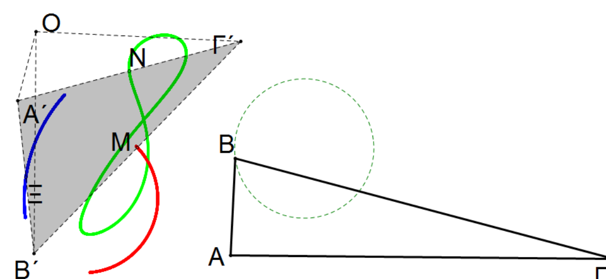


Σχ. 6

9. Σχήμα 6 : Καθώς το σημείο Β του αρχικού τριγώνου κινείται ελευθέρως στο επίπεδο, για τα μέσα Μ,Ν,Ξ των Β΄Γ΄, Α΄Γ΄, Β΄Γ΄ αντιστοίχως, έχουμε την εικόνα: Τα μεν Μ,Ξ να κινούνται επί κύκλων το δε Ν, να διαγράφει σημεία ενός δακτυλίου. Ο δακτύλιος φαίνεται να ορίζεται από δύο ομόκεντρους κύκλους εκ των οποίων ο μεν εξωτερικός φαίνεται να εφάπτεται εξωτερικώς των δύο ο δε εσωτερικός, να εφάπτεται των δύο, στον μεν ένα μεγαλύτερο εσωτερικώς και στον μικρότερο εξωτερικώς. Το δυναμικό λογισμικό εργαζόμενο αόκνως, φέρνει μιαν άλλη πρόταση στην επιφάνεια, χρίζουσα βεβαίως πρώτα σαφούς διατυπώσεως και κατόπιν αποδείξεως. Οι όποιες εικασίες θα γίνουν με επαναληπτικό πειραματισμό. Πράγματι, εάν περιορίσουμε την ελεύθερη κίνηση του Β στο επίπεδο και βάλουμε το Β να κινείται σε κύκλο (σχήμα 7) τότε βλέπουμε μια άγνωστη καμπύλη να διαγράφεται μεταξύ των δύο κύκλων και μάλιστα με έναν συγκεκριμένο τρόπο: Καθώς πλησιάζει τον μικρό κύκλο, εκτελεί απότομα ένα βρόχο

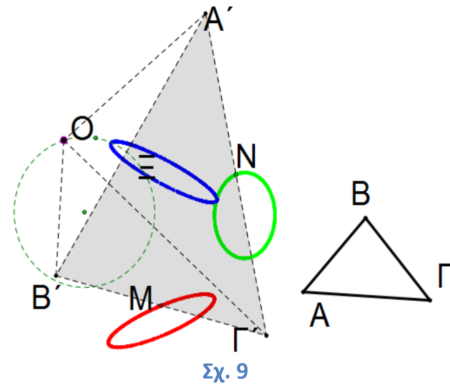


Σχ. 7



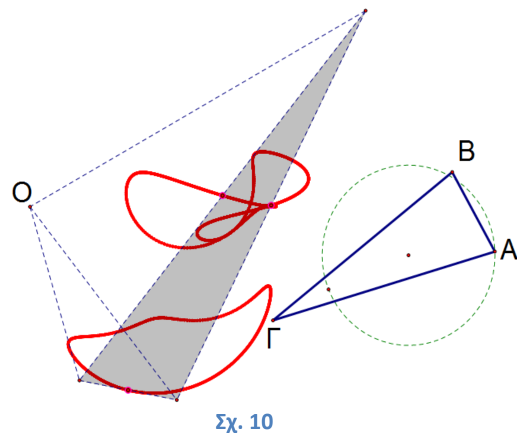
Σχ. 8

στο μεγαλύτερο μέρος του κύκλου και έναν άλλο βρόχο στον μεγαλύτερο κύκλο. Επομένως οι δύο κύκλοι που ορίζουν τον δακτύλιο φαίνεται ότι είναι οι περιβάλλουσες της οικογένειας αυτών των άγνωστων καμπυλών. Όταν ο κύκλος που διαγράφει το Β δεν περιβάλλει το ΑΒΓ (σχήμα 8) τότε οι κύκλοι διαγράφονται μερικώς, όμως η άγνωστη καμπύλη διαγράφεται πλήρως.



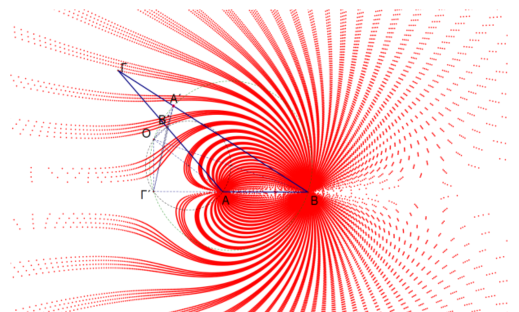
Σχ. 9

10. Αν το Ο το βάλουμε να διαγράψει κύκλο, τότε τα μέσα των πλευρών του ποδικού τριγώνου, φαίνονται να διαγράφουν τρεις ελλείψεις. (Σχ. 9)
11. Εάν επιχειρήσουμε να κινήσουμε το ΒΓ παράλληλα προς τον εαυτό του επί κύκλου διατηρώντας σταθερό το μέγεθός του, τότε τα μέσα των πλευρών του ποδικού τρίγωνου διαγράφουν τρεις άγνωστες καμπύλες. (Σχ.10)
12. Αν με την λογική του αντίστροφου προβλήματος ενός γεωμετρικού τόπου κατασκευάσουμε τους δύο κύκλους του Σχ.2, και βάλουμε να κινούνται επ΄ αυτών τα Α΄ και Β΄ ορίζοντας το Γ ως τομή των διευθύνσεων ΑΒ΄ και Α΄Β, τότε αν απαιτήσουμε από το λογισμικό την σχεδίαση του ίχνους του Γ, παίρνουμε την εικόνα του Σχ.11



Σχ. 10

Φαίνεται μια εικόνα σαν ένα πεδίο της Φυσικής, όπου υπάρχει μια άπειρη οικογένεια καμπυλών που καλύπτουν το επίπεδο και δεν τέμνονται πέραν των Α, Β. Και στην Φυσική η εικόνα ενός πεδίου, ορίζεται από γραμμές που δεν τέμνονται και έχουν μια ιδιότητα γεωμετρικού τόπου. Αν γνωρίζαμε εκ των προτέρων εξ αρχής μια τέτοια διαδρομή, τότε αν το Γ ακολουθούσε μία απ΄ αυτές, τα Α΄ και Β΄ θα διέγραφαν κύκλους, με σχέση ταχυτήτων όση έχουμε ορίσει



Σχ. 11

στο λογισμικό. Η μεταπήδηση σε γειτονική τροχιά δεν μπορεί να καταγράψει αισθητή ασυνέχεια στην κίνηση, καθώς και η γειτονική τροχιά, οσοδήποτε κοντά έχει προκύψει από μια κοντινή κίνηση. Έτσι η χαοτική κίνηση του Γ οπουδήποτε στο επίπεδο με οποιαδήποτε τροχιά, διαγράφει μια –φαινόμενη- συνεχή τροχιά για τα Α΄, Β΄.

Ειδικά και Γενικά Συμπεράσματα: α) Το λογισμικό προσφέρει αξεπέραστη ακρίβεια σχεδιαστική. Στην πραγματικότητα, λόγω δυνατότητας δυναμικής κίνησης, αυτό που συνήθως φαίνεται να ισχύει «με το μάτι» και να οδηγεί σε μια πρώτη εικασία, μπορεί να εξεταστεί με τροποποίηση του σχήματος με μια κίνηση και να ειδωθεί και από άλλη οπτική σχεδιαστική. Έτσι, η όποια λανθασμένη εικασία, σταματά εν τω γεννάσθαι. Η δυνατότητα μέτρησης όλων των μεγεθών λόγων, συναρτήσεων, γωνιών κτλ επίσης σταματά αμέσως λανθασμένες εικασίες ή –επί το δημιουργικότερον - δημιουργεί εδραίες εικασίες, υποθέσεις, σχεδόν βεβαιότητες, οπότε απομένει η απόδειξη. Παραλλήλως σχεδιάζει όποια συνάρτηση του τεθεί που αφορά γεωμετρικά μεγέθη (μήκη εμβαδά, λόγους, μέτρα γωνιών, συναρτήσει οποιουδήποτε εν τω μεταβάλλεσθαι μεγέθους και έχουμε άμεση παράλληλη σχεδίαση της συνάρτησης απ΄όπου εξάγουμε γεωμετρικά συμπεράσματα . Γίνεται δηλαδή μια άμεση σύνδεση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την Ανάλυση. Επίσης η δυνατότητα διερεύνησης (ειδικές περιπτώσεις, οριακές περιπτώσεις, οριακές θέσεις, εκφυλισμός σχήματος κ.ο.κ) είναι αξεπέραστη.

β) Η ίδια η ύπαρξη του λογισμικού και η ίδια η χρήση του, αναπόφευκτα επάγει την ανάγκη πειραματισμού και διερεύνησης πράγμα που ναι μεν αρχαιόθεν υπάρχει στα Μαθηματικά, όμως «επιμελώς αποκρύπτεται» αφού σχετικές αναφορές, συνηθέστατα δεν συναντώνται στα βιβλία Μαθηματικών (εγχειρίδια, συγγράμματα, Ιστορικά της Επιστήμης) ούτε καν ως σπαράγματα. Πιθανόν –για να διακινδυνεύσουμε και μια εξήγηση- η εξιδανικευμένη διάνοια, πρότυπο, δεν δέχεται την «τυχαία ανακάλυψη» του εργαστηρίου όπως συνήθως γίνεται στις Φυσικές Πειραματικές Επιστήμες[1]. Σε κάθε περίπτωση όμως αυτό δεν μπορεί να συνεχίζεται, αφού όλες οι διδακτικές των αντικειμένων παντός του επιστητού, ομιλούν για «επανανακάλυψη γνώσης» πράγμα που τα ειδικώς σχεδιασμένα για διδακτικούς σκοπούς (και όχι μόνο) λογισμικά προσφέρουν πλουσίως, ενώ η

[1] Εάν βάλλει κάποιος στην Google τις λέξεις «τυχαίες ανακαλύψεις» θα βρει αναφορές και δεκάδες άρθρα για επίσης δεκάδες εφευρέσεις Ιατρικής, Χημείας, Φαρμακευτικής, Φυσικής, Αστρονομίας, όχι όμως και Μαθηματικών! Κατά ένα ορισμό της ανακάλυψης, « Ανακάλυψη είναι ένα τυχαίο γεγονός που συναντά ένα προετοιμασμένο μυαλό.» Albert von Szent-Gyorgyi, 1893-1986, Ούγγρος φυσιολόγος. Αυτό βεβαίως, ισχύει για όλους τους ερευνητές, όλων των επιστημών.

λογική του εθισμού στην διερεύνηση, γενίκευση, εξέταση ομοειδών περιπτώσεων, ειδικότερων περιπτώσεων , γενικά ο πειραματισμός με την παρατήρηση, προφανώς και αναπτύσσουν την κριτική σκέψη, αφού όλες αυτές οι δραστηριότητες εξ ορισμού συνιστούν την ίδια την –από όλους ευκταία- κριτική σκέψη. Κάτι τέτοιο, σε ένα ιδανικό εκπαιδευτικό σύστημα, θα έπρεπε να μας κάνει να μεταβούμε από την απαγόρευση αντιγραφής από τα σκονάκια στις εξετάσεις, στην απαγόρευση της αντιγραφής και «από μνήμης»[2] όπως είναι το νυν δεσπόζον μοντέλο εξετάσεων και να οδεύσει σταθερά στις αρχές της κριτικής σκέψης (λ.χ. εξετάσεις «με ανοιχτά βιβλία») και ανάλογα θέματα.

γ) Καθώς προχωρούμε σε πιο περίπλοκες κινήσεις, οι εμφανιζόμενοι γεωμετρικοί τόποι, από το επίπεδο της ευθείας και του κύκλου, πηγαίνουν στην έλλειψη και κατόπιν σε μη «επώνυμες» καμπύλες, πράγμα που δείχνει άλλη μια φορά, από άλλη οπτική, τα περιορισμένα όρια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και την αναγκαία νομοτελειακή εξέλιξή της με την Αναλυτική Γεωμετρία, όπου από την τάξη των πεπερασμένων καμπυλών μελέτης (ευθεία, κύκλος, κωνικές τομές) μεταβαίνουμε στον πραγματικό κόσμο της Γεωμετρίας, δηλ. των απείρων ειδών καμπυλών.

δ) Οι εικόνες χάους (κίνηση οπουδήποτε στο επίπεδο) επάγουν τάξη (κίνηση σε συγκεκριμένη κυκλική τροχιά) Αντιστρόφως, κίνηση σε συγκεκριμένη τάξη – τροχιά, μπορεί να δημιουργήσει φαινόμενο χάος, αφού η συνέχεια της κίνησης στους κύκλους με σταθερή σχέση ταχυτήτων φαίνεται να δημιουργεί μια κάλυψη του επιπέδου με μια οικογένεια καμπυλών (εικασία)

ε) Δημιουργείται η αίσθηση, ότι χωρίς το συγκεκριμένο λογισμικό είναι πάρα πολύ δύσκολη η ανακάλυψη προτάσεων (εδώ στο ορθικό) Στην πραγματικότητα, φαίνεται η εντύπωση να είναι ακόμα πιο στενή. Η δραστηριότητα πειραματισμού με κίνηση και «μηχανικές μεθόδους» χρονολογείται τουλάχιστον από την εποχή του Αρχιμήδους[3], ενώ κατά την Αναγέννηση και μετά όπου οι μεγάλοι Μαθηματικοί ήταν συνήθως σε Βασιλικές Αυλές είχαν την δυνατότητα

---

[2] Χαρακτηριστική αυτή η φράση –θέση του Πανεπιστημιακού καθηγητή του Παν. Ιωαννίνων Γιώργου Μαυρογιώργου σε άρθρο του υπό τον τίτλο «**Εάν και όταν οι «ειδικοί» του Υπουργείου Παιδείας αντιγράφουν!» στην εκπαιδευτική πύλη Αλφαβήτα.**

[3]**Επιστολή Αρχιμήδους «Έφοδος προς Ερατοσθένην»(** 83.17-28) Ὁρῶν δέ σε, καθάπερ λέγω, σπουδαῖον καὶ φιλοσοφίας προεστῶτα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν κατὰ τὸ ὑποπίπτον θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμασα γράψαι σοι καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον ἐξορίσαι τρόπου τινὸς ἰδιότητα, καθ’ ὅν σοι παρεχόμενον ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰςεἰςτὸ δύνασθαί τινα τῶν ἐν τοῖςμαθήμασι **θεωρεῖν διὰ τῶν μηχανικῶν**. Τοῦτο δὲ πέπεισμαι **χρήσιμον εἶναι οὐδὲν ἧσσον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρημάτων. Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν.**

της μηχανικής σχεδιαστικής σε αμμοδόχους κτλ για «ισχυρές εικασίες». Εκεί ξαναρχίζει η ανακάλυψη «επώνυμων καμπυλών» όπου δίπλα στα ονόματα Αρχιμήδους (ελλειικοειδούς) Απολλωνίου (κωνικών τομών) Ιππεία του Ηλείου (τετραγωνίζουσα) , Διοκλέους (κισσοειδής) καμπύλη του Ευδόξου, κτλ . εμφανίζονται και οι νεώτερες των Μπερνούλι (μινίσκος) παραβολή του Νεύτωνος, τρίαινα του Νεύτωνος και άλλες ων ουκ έστιν αριθμός. Γεγονός είναι, ότι εκτός από κάποιες απλές προτάσεις που μπορούν να ανακαλυφθούν δια γυμνού οφθαλμού (και μάλλον έχουν ήδη ανακαλυφθεί όλες) οι υπόλοιπες απαιτούν ισχυρά εργαλεία και πλέον τα εργαλεία τα έχουν και οι ερευνητές και οι δάσκαλοι των Μαθηματιών και οι μαθητές. Μάλιστα, τα εργαλεία αυτά, είναι σχεδόν το ίδιο προσιτά σε όλους ακόμα και τα μη ελευθέρας διανομής. (Λογισμικά Mathematica, MathDad, MAPL, κ.ά.)

στ) Γνωρίζουμε, ότι τα δυναμικά Γεωμετρικά λογισμικά κυκλοφορούν ευρύτατα, διδάσκονται στην επιμόρφωση Β΄ επιπέδου, πλην η εισαγωγή τους στην εκπαιδευτική πράξη είναι υποτυπώδης. Τα οφέλη ωστόσο δεν είναι γνωστά, καθώς οι πρωτόγνωρες βιωματικές καταγραφές δεν μπορούν να μεταφερθούν πάντα στο χαρτί παραστατικά και πειστικά. Η επί πολλά χρόνια άσκηση και ενάσκηση των εκπαιδευτικών των Μαθηματικών με συγκεκριμένη πρακτική σε συγκεκριμένο περιβάλλον (Πανελλήνιες , φροντιστηριακή διδασκαλία) δημιουργούν εδραίες δύσκολα μεταβαλλόμενες αντιλήψεις για το τι είναι τα μαθηματικά και πώς διδάσκονται. Δεν είναι όμως έτσι, καθώς ένα τεράστιο κομμάτι τους, η μαθηματική ανακάλυψη, δεν αιτιολογείται επαρκώς ή αφήνεται να εννοηθεί ότι μόνο ιδιοφυίες μπορούν να ασχοληθούν με αυτήν. Η σύγχρονη όμως διδακτική, απαιτεί διαδικασίες επανανακάλυψης της γνώσης η οποία γίνεται μέσω παρατηρήσεων, πειραμάτων («άγνωστη λέξη» στα Μαθηματικά, ωστόσο καθημερινή έννοια για τους ερευνητές των μαθηματικών) εικασιών, υποθέσεων, απορρίψεων με αντιπαράδειγμα, τροποποιήσεων, ανασκευών και αποδείξεων. Η στερεοτυπική δομή «πρόταση-απόδειξη» , «άσκηση-λύση» επαναλαμβάνεται σχεδόν σε όλα τα μαθηματικά εγχειρίδια και συγγράμματα, έτσι ώστε η μαγεία της μαθηματικής ανακάλυψης (όχι της απόδειξης) να τείνει να μηδενίζεται αφού πρόσβαση σε αυτήν, φαίνεται να έχουν μόνο «οι προικισμένοι» και όχι οι κοινοί θνητοί. Η «αντικειμενική» αλήθεια, ίσως είναι κοντά σε μια τέτοια εκτίμηση, όμως σίγουρα δεν είναι και η αλήθεια. Όλα τα εργαλεία του ανθρώπου σε ολόκληρο τον τομέα του επιστητού, είναι προεκτάσεις των αισθήσεών του (όραση , ακοή απτικότητα, γεύση, όσφρηση) και κάποιων νοητικών λειτουργιών του (μνήμη, ταξινόμηση, αναζήτηση, διερεύνηση, ταχύτητα υπολογισμών κ. ά.) Οι Η/Υ έκαναν την επανάστασή τους και ο επανακαθορισμός του νοήματος των Μαθηματικών (τι είναι μαθηματικά ,

γιατί τα διδάσκουμε, ποία διδάσκουμε ποία δεν διδάσκουμε, πώς τα διδάσκουμε) τίθεται κάθε μέρα σε αναθεώρηση και επανακαθορισμό και μάλιστα με μεγάλη ταχύτητα. Αυτό συνήθως γίνεται αντιληπτό βιωματικά όταν φυλλομέτρει κάποιος παλαιά διδακτικά εγχειρίδια Μαθηματικών και αναρωτιέται το τι και το γιατί του παλιού Αναλυτικού προγράμματος σπουδών που σηματοδοτούσε το κάθε εγχειρίδιο. Καταθέτουμε επίσης την εμπειρία μας για επιφωνήματα θαυμασμού που προκαλούσε η εμφάνιση για πρώτη φορά «με ένα κλικ» ενός γ.τ. στους παλιούς Μαθηματικούς που είχαν την Λυκειακή εμπειρία διδασκαλίας ως μαθητές (και βέβαια την δυσκολία) των γ.τ.

Η χρήση αυτών των εργαλείων στην τάξη, θα πρέπει να γίνει μια αυτονόητη διαδικασία σε όλα τα σχολεία και η ανάδειξη των διδακτικών πλεονεκτημάτων τους είναι ο μικρός στόχος της παρούσας εργασίας.

Βιβλιογραφικές - Διαδικτυακές αναφορές:

1) http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/gGallery/problems/Pedal.html Ιστοσελίδα του καθηγητή του Παν. Κρήτης Πάρη Πάμφιλου
2) http://mathworld.wolfram.com/PedalTriangle.html από τον ιστότοπο Wolfrarm Mathworld
3) http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student.Folders/Matteson.September/pedal/pedal.html από το Πανεπιστήμιο της Georgia
4) Πλατάρος Ιωάννης *«Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση με χρήση των γεωμετρικών λογισμικών»* Πρακτικά 1ου Εκπαιδευτικού Συνέδριου ένταξης και χρήσης των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας Βόλος 24-26/4/2009
5) Πλατάρος Ιωάννης *«Μια Γεωμετρική εφαρμογή Μεγίστου κι Ελάχιστου με χρόνο, μέσω Δυναμικού Λογισμικού, ως Διδακτική Πρόταση»* Πρακτικά 2ου Συνέδριου Ημαθίας για τις ΤΠΕ Νάουσα-Βέροια 23-24-25 Απριλίου 2010
6) Πλατάρος Ιωάννης *«Η ολιστική διδασκαλία των απλών γεωμετρικών τόπων,* στα πλαίσια σύγχρονων παιδαγωγικών θεωρήσεων.» Πρακτικά 25ου Συνεδρίου ΕΜΕ στον Βόλο.
7) Πλατάρος Ιωάννης *«Η διδακτική αξιοποίηση του λογισμικού Sketchpad στην διδασκαλία των Γεωμετρικών Απεικονίσεων στο επίπεδο.»* 27ο Συνέδριο ΕΜΕ Χαλκίδος,19-21 Νοεμβρίου 2010

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο
Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Μαθηματικό Τμήμα
Τομέας Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών
Μάθημα : Άλγεβρα για την διδακτική
Διδάσκων κ. Ράπτης Ευάγγελος



μεταπτυχιακός φοιτητής

Ιωάννης Π. Πλατάρος

Α.Μ. 211.502



5 Δεκεμβρίου 2002

Να εξεταστεί , ποίες γωνίες της μορφής 9λ+3μ+2 , λ, μ $\in \mathbb{N}$ κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Σκιαγραφώ την απόδειξη:

- Η γωνία των 20^o δεν κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη. (Απόδειξη I)
- Η γωνία των 1^o δεν κατασκευάζεται. Αν κατασκευαζόταν η γωνία της 1^o , τότε θα κατεσκευάζετο και η 2^o (απλή διαδοχική παράθεση) η 3^o , η 4^o κ.ο.κ. και η γωνία των 20^o . Όμως η γωνία των 20^o δεν κατασκευάζεται, όπερ άτοπον. Άρα η 1^o δεν είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη.
- Η γωνία των 36^o κατασκευάζεται (Απόδειξη II)
- Η γωνία των 30^o κατασκευάζεται (Απόδειξη III)
- Η γωνία των $36^o - 30^o = 6^o$ κατασκευάζεται , διότι αν κατασκευάζονται δύο γωνίες, είναι κατασκευάσιμη και η διαφορά τους . (Απόδειξη IV)
- Η γωνία των 3^o κατασκευάζεται από διχοτόμηση της γωνίας 6^o .Κατασκευαζομένης της γωνίας των 3^o , κατασκευάζεται και οποιοδήποτε ακέραιο πολλαπλάσιό της, δηλαδή κάθε γωνία της μορφής 3ρ , $\rho \in \mathbb{N}$.
- Κάθε ακέραιος αριθμός $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αποκλειστικά και μόνο της μορφής ή 3ρ ή 3ρ+1 ή 3ρ+2 . (Απλό πόρισμα της

Ευκλείδειας διαίρεσης

($\nu : 3 = 2\pi + \upsilon \;\; \mu\varepsilon \;\; \upsilon = 0 \;\; \eta \; 1 \;\; \eta \;\; 2$) Αν λοιπόν κατεσκευάζετο η γωνία 3ρ+1 , δεδομένου ότι κατασκευάζεται και η 3ρ , τότε θα κατεσκευάζετο και η διαφορά τους (3ρ+1)-3ρ=1 , άτοπο διότι η γωνία 1^o δεν κατασκευάζεται.

Αν ομοίως κατεσκευάζετο και η γωνία 3ρ+2 , δεδομένου ότι η 3ρ κατασκευάζεται, θα κατασκευάζετο και η διαφορά τους , η γωνία (3ρ+2)-3ρ=2^o . Τότε δια διχοτομήσεως, θα κατασκευάζετο και η γωνία 1^o , άτοπο.

Επομένως , οι μόνες γωνίες που κατασκευάζονται (σε μοίρες) είναι τα πολλαπλάσια του 3 , και μόνον αυτά)

- Άρα , στο τεθέν πρόβλημα, αναζητώ κ , λ $\in \mathbb{N}$ και ν $\in \{1,2,3,...,119,120\}$ έτσι ώστε:

$$0<9\lambda+3\mu+2\leq 360^o \qquad (1)$$

$$\text{και } 9\lambda+3\mu+2=3\nu \Leftrightarrow$$

$$9\lambda+3\mu-3\nu= 2 \qquad (2)$$

Η (2) αποτελεί διοφαντική εξίσωση με τρεις αγνώστους , την οποία επιλύεται κατά τον γνωστό αλγόριθμο , και τις οποίας οι λύσεις θα πρέπει να πληρούν την συνθήκη (1)

Αλλά η λύση της (2) είναι σύντομη , διότι ισοδυναμεί:

$$9\lambda+3\mu=3\nu- 2 \;\; \Leftrightarrow$$

$$3(3\lambda+\mu)=3\nu- 2 \;\; \Leftrightarrow$$

$3/(3\nu-2)$ άτοπο , διότι $3 \nmid (3\nu-2)$, με $\nu \in \mathbb{N}$

Επομένως, δεν υπάρχουν ακέραιοι λ,μ έτσι ώστε η γωνία $\angle$Α= 9λ+3μ-2 εκφραζομένη σε μοίρες , να είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη.________________

Αναλυτικά τα επί μέρους των αποδείξεων , έχουν ως εξής:

*Απόδειξη I.***(Η γωνία των 20^o δεν είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη)**

Εάν $\theta=20^o$, τότε από τον τύπο

$\sigma\upsilon\nu 3\theta=4\sigma\upsilon\nu^3\theta+3\sigma\upsilon\nu\theta$, με αντικατάσταση θα έχω:

$$\frac{1}{2}=4\sigma\upsilon\nu^3 20^o+3\sigma\upsilon\nu 20^o \Leftrightarrow$$ (Θέτοντας συνθ=χ)

$8\chi^3-6\chi-1=0$ (1)

Το πολυώνυμο $\varphi(\chi)=8\chi^3-6\chi-1$ είναι ανάγωγο επί του Q ,διότι αν δεν ήταν , θα εγράφετο ως γινόμενο με την μορφή:

$\varphi(\chi)=8(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)(\chi-\rho_3)$ ή $\varphi(\chi)=(\chi-\rho)(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma)$

και στις δύο περιπτώσεις θα είχε μία τουλάχιστον ρητή ρίζα. Όμως, οι πιθανές ρητές ρίζες, αν υπάρχουν, είναι μόνο οι $\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{8}$.

όμως φ(χ)={[(8χ)χ-6]χ-1} (Εξ ου και το «σχήμα Horner» και μέσω αυτού ελέγχω γρήγορα ότι:

$φ(-\frac{1}{2})=1 \neq 0$, $φ(\frac{1}{2})=-3 \neq 0$, $φ(\frac{1}{4})=-\frac{13}{2} \neq 0$,

$φ(-\frac{1}{4}) \neq 0$, $φ(\frac{1}{8}) \neq 0$, $φ(-\frac{1}{8}) \neq 0$

Επομένως η επέκταση του σώματος Q ,

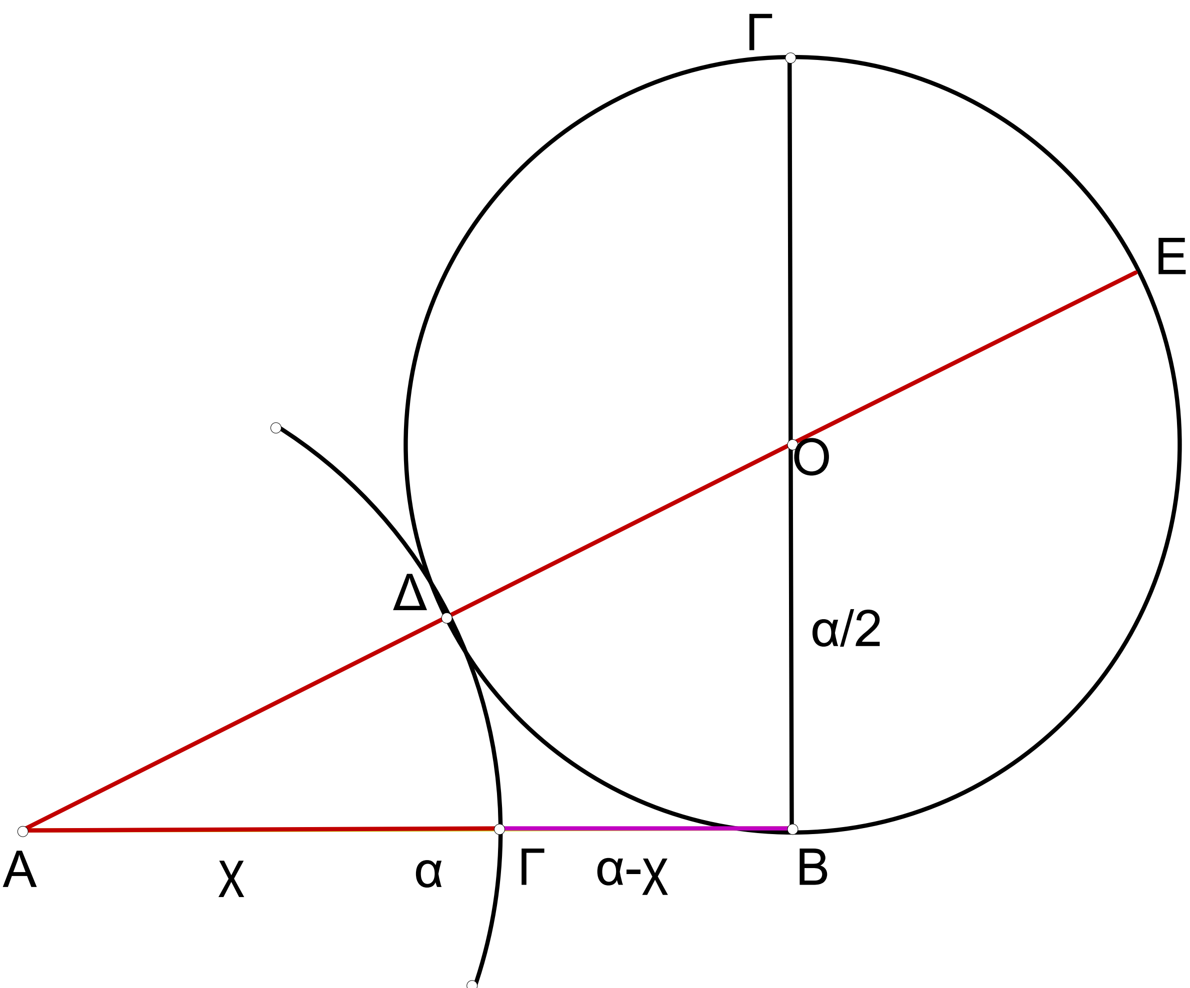
το σώμα Q(συν 20^o) έχει διάσταση επί του Q τρία

Δηλ. [Q(συν 20^o) : Q]=3 $\neq$ $2^ν$.

Όμως η αναγκαία συνθήκη (και μη ικανή) κατασκευασιμότητας για βαθμό επεκτάσεως δύναμη του 2 δεν εκπληρούται, συνεπώς το συν 20^o , άρα και η γωνία των 20^o , δεν είναι κατασακευάσιμη.

***Απόδειξη ΙΙ*. (Η γωνία των 36^o είναι κατασκευάσιμη)**

Κατασκευή με κανόνα και διαβήτη του μέσου και άκρου λόγου **(Χρυσής τομής)**



Έστω ΑΒ=α , το προς διαίρεσιν τμήμα. Φέρω κάθετη στο Β και λαμβάνω τμήμα ΒΓ=α

Με διάμετρο το ΒΓ κατασκευάζω κύκλο. Φέρω την ΑΟ , η οποία τέμνει τον κύκλο στο Δ.

Η ΑΒ , εκ κατασκευής είναι εφαπτόμενη στον κύκλο , διότι είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΒ στο άκρο της Β.

Από την δύναμη του σημείου Α ως προς τον κύκλο , έχω ότι

$(Α\Delta)(ΑΕ)=(ΑΒ)^2 \Leftrightarrow$

$\chi(\chi+\alpha)=\alpha^2 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{x}{a}=\frac{a}{x-a}$ που είναι ο ζητούμενος λόγος.

Στην συνέχεια, με διαβήτη, μεταφέρω το χ πάνω στο α και έτσι έχω επιτύχει την χρυσή τομή.

Για να κατασκευάσω το κανονικό δεκάγωνο , ξεκινώ την ανάλυση του προβλήματος , με το ότι η κεντρική του γωνία πρέπει να είναι $\frac{360^0}{10}$ $=36^o$. Τότε όμως, εκάστη από τις προσκείμενες στην βάση του ισοσκελούς τριγώνου γωνίες θα είναι 72^o . Αν διχοτομήσω μία , τότε η απέναντι ακτίνα χωρίζεται σε μέσο και άκρο λόγο, διότι από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου θα έχω:

$$\frac{B\Delta}{\Delta O}=\frac{AB}{AO}\Rightarrow$$

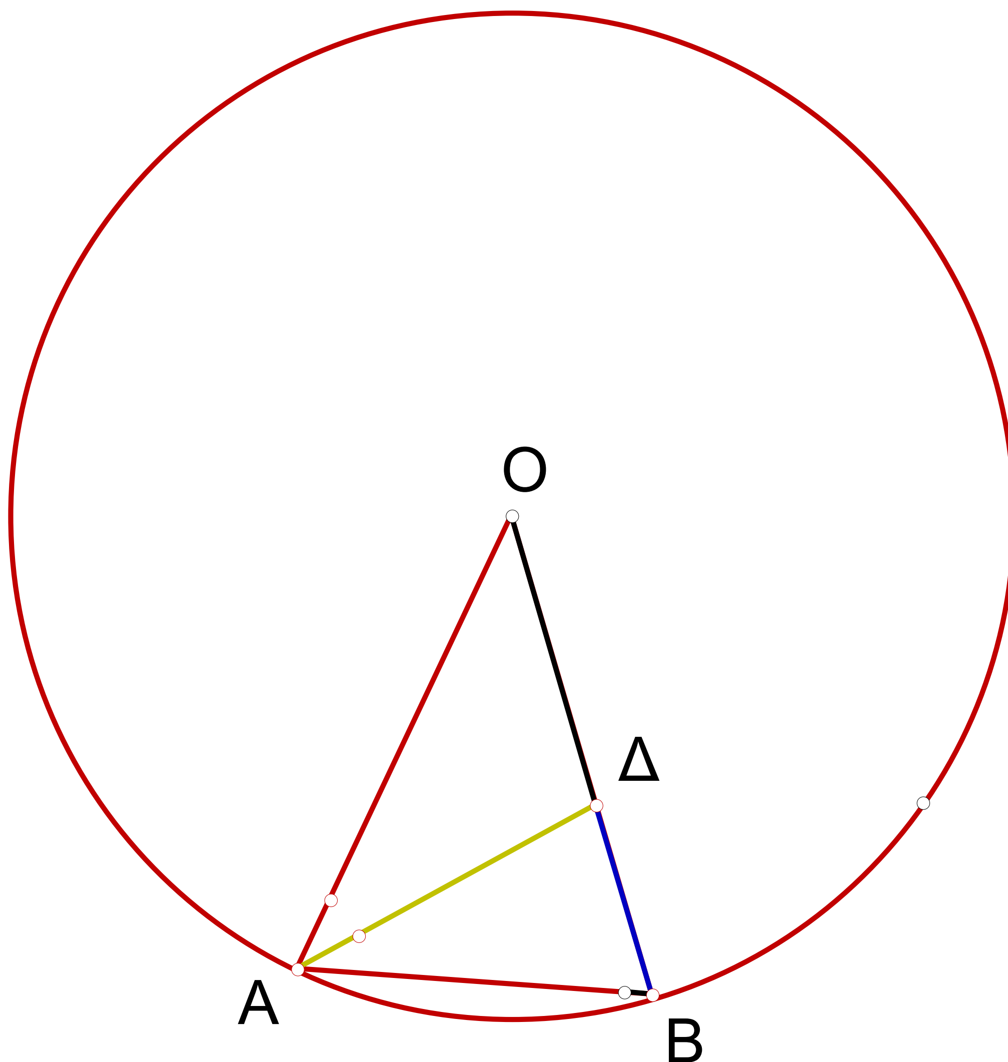
$$\frac{B\Delta}{\Delta O}=\frac{\lambda_{10}}{R}\Rightarrow$$

$$\frac{R-\lambda_{10}}{\lambda_{10}}=\frac{\lambda_{10}}{R}\Rightarrow$$

($AB=A\Delta=\Delta O=\lambda_{10}$ λόγω των ισοσκελών τριγώνων)

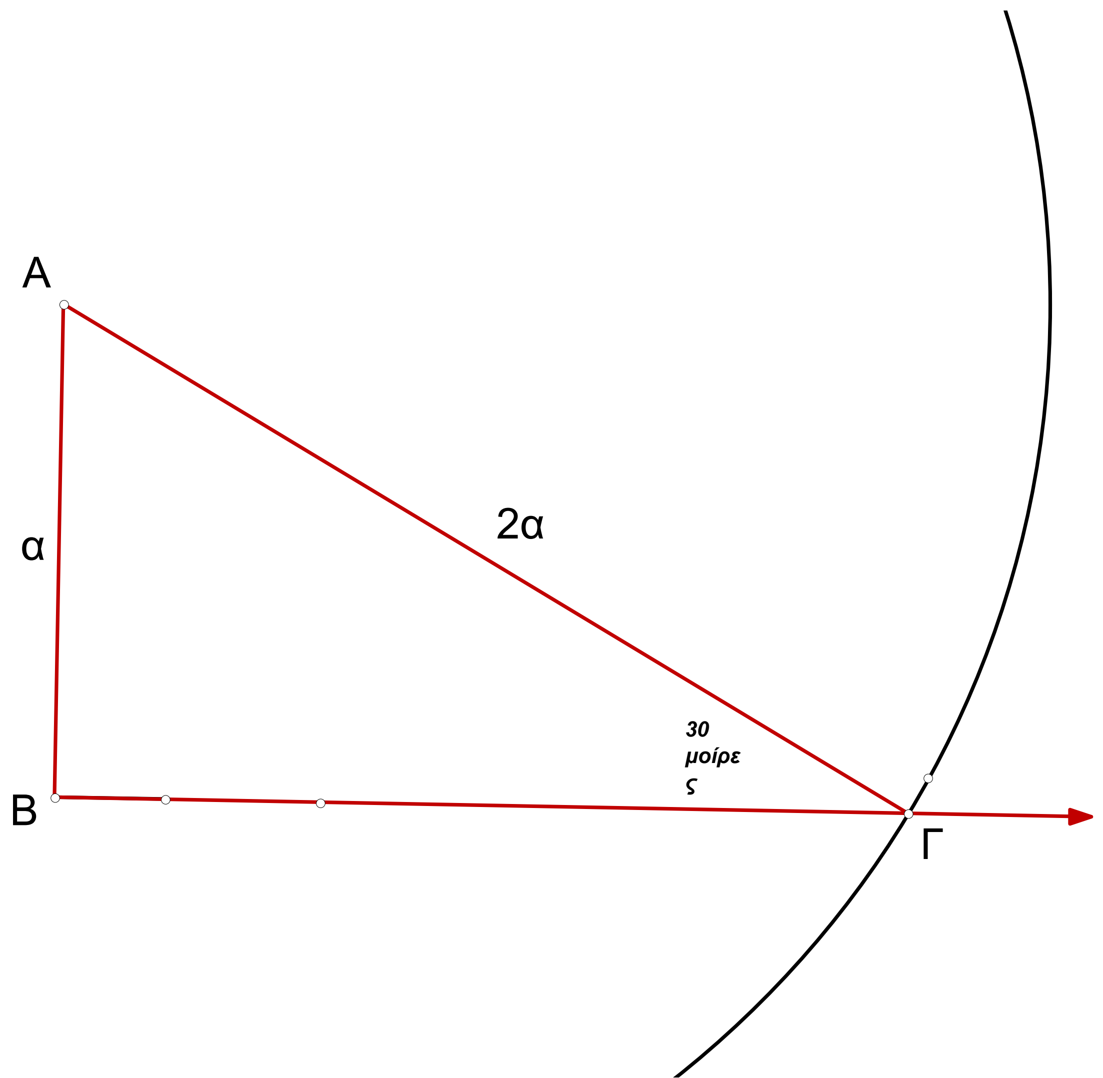
Οπότε το λ_{10} κατασκευάζεται , είτε με τον κλασσικό τρόπο που έχει περιγραφεί ανωτέρω, χωρίζοντας δηλαδή την ακτίνα του κύκλου σε μέσο και άκρο λόγο και θέτοντας το μεγαλύτερο κομμάτι . λ_{10}

Με αυτό τον τρόπο είναι κατασκευάσιμη και η γωνία των 36^o .



***Απόδειξη ΙΙΙ*. (Κατασκευή της γωνίας των 30^o)**

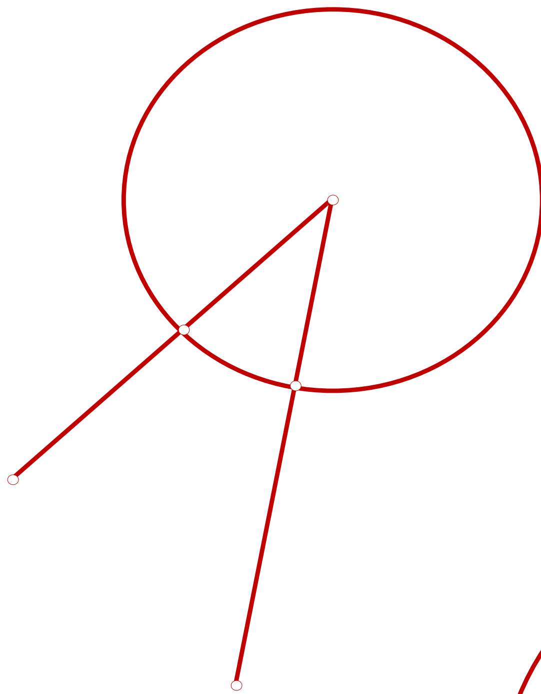
Αυτή επιτυγχάνεται με κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με μια κάθετη α και υποτείνουσα 2 α , οπότε έχω και το ημ $30^o = 1/2$

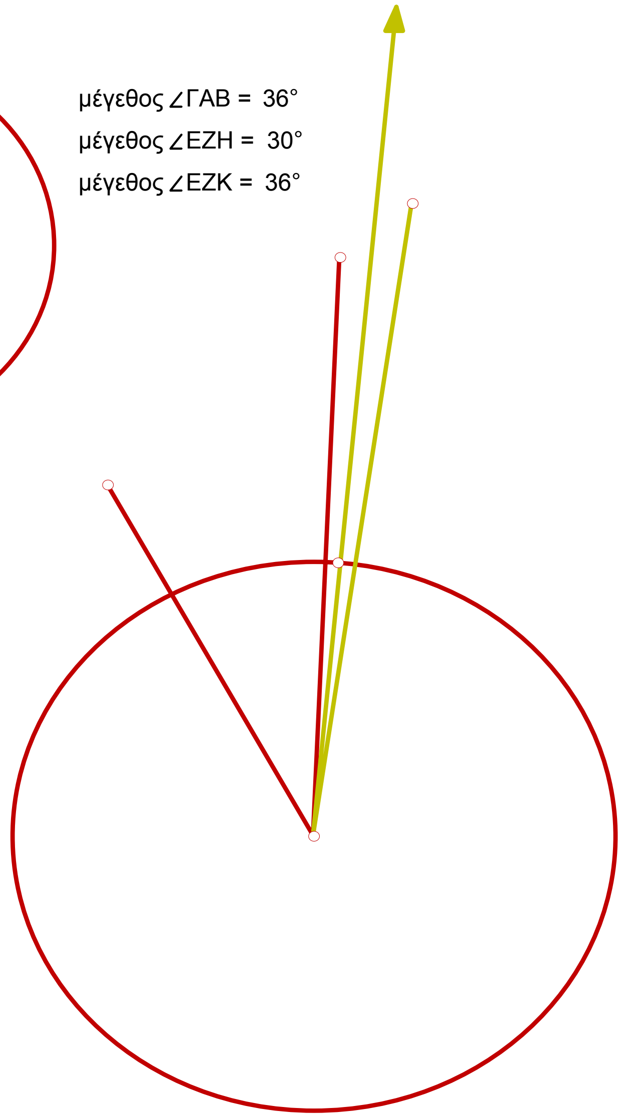


***Απόδειξη IV* (Κατασκευή της διαφοράς δύο γωνιών)**

Καθίστανται επίκεντρες, σε ίσους κύκλους , μεταφέρω τα τόξα στα οποία βαίνουν, τα θέτω σε κοινή αρχή και να συμπίπτουν, οπότε σχηματίζεται η διαφορά των τόξων, άρα και των επικέντρων γωνιών στα οποία βαίνουν.

Με διχοτόμηση κατασκευάζω και την γωνία των 3^o




μέγεθος ∠ΓΑΒ = 36°
μέγεθος ∠ΕΖΗ = 30°
μέγεθος ∠ΕΖΚ = 36°

«Μια Γεωμετρική εφαρμογή Μεγίστου κι Ελάχιστου με χρόνο, μέσω Δυναμικού Λογισμικού, ως Διδακτική Πρόταση»

Πλατάρος Γιάννης

Μαθηματικός 1[ου] ΓΕΛ Μεσσήνης
plataros@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μία από τις δυνατότητες που παρέχουν τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά, είναι η δυνατότητα μελέτης μεταβολών γεωμετρικών μεγεθών σε συνάρτηση με τον χρόνο, μέσω αντιστοίχου γραφικής παραστάσεως. Επί πλέον ο δυναμικός χειρισμός του σχήματος σε προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου, βοηθά αποφασιστικά τον μαθητή στον σχηματισμό της ορθής τελικά εικασίας και μάλιστα της εικασίας που έχει να κάνει με την ίδια την διατύπωση –ανακάλυψη της πρότασης. Επίσης η χρήση του δυναμικού εργαλείου, μπορεί να μυήσει ουσιαστικά τον μαθητή στην απειροστική σκέψη, καθώς το ίδιο το λογισμικό που θέτει την κίνηση στα σχήματα ή παρακολουθεί τις μεταβολές τους αποτελεί γέφυρα μεταξύ Ανάλυσης και Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *μέγιστο, ελάχιστο, εμβαδόν, περίμετρος, δυναμικό γεωμετρικό λογισμικό.*

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί υπολογιστικά συστήματα τα οποία δημιουργούν περιβάλλοντα μάθησης γεωμετρίας του χώρου [7] . Σε περιβάλλοντα συνδυασμένης μάθησης (blended learning) οι μαθητές συνδυάζουν την παραδοσιακή διαδικασία μάθησης που παρέχεται από τον εκπαιδευτικό με πρακτικές χρήσης πληροφοριών από υπολογιστικά συστήματα [4].

Είναι γεγονός, ότι το Δυναμικό λογισμικό Γεωμετρίας, μπορεί να θεωρηθεί, ως η πλέον σημαντική εξέλιξη στην Γεωμετρία από την εποχή του Ευκλείδη. Έχει αναθερμάνει το ενδιαφέρον για μια βασική έρευνα , ενώ ανέστειλε τον κίνδυνο να υποβαθμιστεί η διδασκαλία της στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. [2], [6]

Το πιο σπουδαίο από παιδαγωγικής απόψεως πλεονέκτημα του δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού, είναι η δυνατότητά του να ενθαρρύνει τον πειραματισμό και την ερευνητική προσέγγιση στην μελέτη της Γεωμετρίας. Σε μια διδακτική προσέγγιση τέτοιου τύπου, οι μαθητές εξοικειώνονται στην τέχνη της μαθηματικής δημιουργίας και ανακάλυψης, αφού προσφέρονται άφθονες

ευκαιρίες για εξερεύνηση, διατύπωση εικασιών, ανασκευής και επαναδιατύπωσής τους, όπως και τελικού ελέγχου με την κατασκευή αποδείξεων [11]
Σε αυτή την εργασία χρησιμοποιήθηκε το δυναμικό λογισμικό Geometer's Sketchpad λόγω της δυνατότητας του να παράγει γεωμετρικά σχέδια με την εισαγωγή πληροφοριών του χρήστη, ο οποίος μπορεί να τα μετασχηματίζει κινώντας ένα στοιχείο του σχήματος [1] ώστε να αντιμετωπισθεί ένα πρόβλημα μεγίστου /ελαχίστου.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Έχει δοκιμασθεί ένα συγκεκριμένο πρόβλημα μεγίστου και ελαχίστου σε μαθητές της Β΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Μεσσήνης, , όπως και σε επιμορφούμενους καθηγητές Β΄ επιπέδου σε διαφορετικούς χρόνους. Η διαπραγμάτευση έγινε με το δυναμικό εκπαιδευτικό λογισμικό Sketchpad και ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στο πώς θα διατυπωθούν οι εικασίες για την λύση του, μέχρι να ανακαλυφθεί η σωστή που θα οδηγήσει και στην λύση.

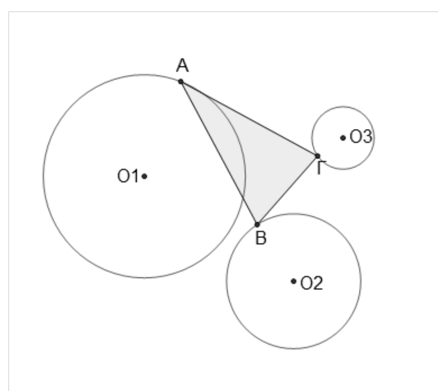
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Αντιμετωπίζουμε το εξής πρόβλημα: *«Τρία σημεία Α, Β, Γ, κινούνται επί τριών κύκλων. Να εξεταστεί αν και πότε υπάρχει περιοδικότητα στην κίνηση του τριγώνου ΑΒΓ , όπως και ποίες είναι οι θέσεις των τριών σημείων, για να έχουμε μέγιστο και ελάχιστο εμβαδόν ή περίμετρο»* Η διατύπωση, που δεν είναι κλειστού τύπου, επάγει σε ένα ανοικτό πρόβλημα, του οποίου η όλη διερεύνηση καθίσταται ιδανική με ένα δυναμικό Γεωμετρικό λογισμικό (το Sketchpad εδώ) μέσω ανακαλυπτικών διαδικασιών μάθησης .

ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ:

Η περιοδικότητα ήταν ένα σκέλος του προβλήματος για το οποίο δεν διαπιστώθηκαν ιδιαίτερες δυσκολίες στην επίλυση. Σημειωτέα μόνο η παρατήρηση ότι όλοι πρόσεξαν ότι μοιάζει με πρόβλημα Φυσικής παρά Γεωμετρίας. Πράγματι, περιοδικότητα έχουμε, όταν ξεκινώντας από οποιοδήποτε τυχαίο στιγμιότυπο-θέση, επανερχόμαστε στο ίδιο, σε κάποιο χρόνο t .

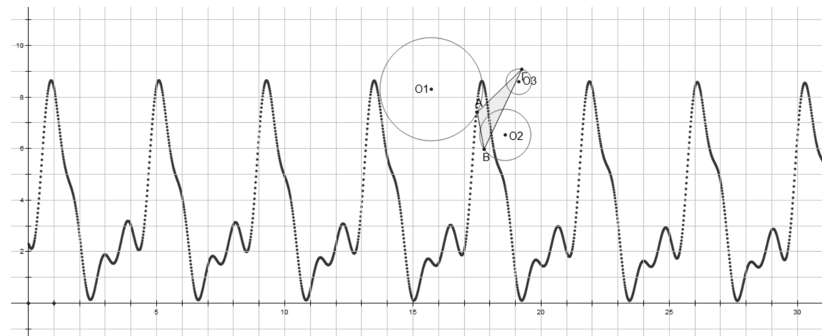


Σχήμα 1

Τότε τα Α,Β,Γ θα έχουν διαγράψει ακέραιο αριθμό περιστροφών κ, λ, μ, αντιστοίχως και θα ισχύει:

$$\upsilon t = \kappa \cdot 2\pi\rho_1 =$$
$$\lambda \cdot 2\pi\rho_2 = \mu \cdot 2\pi\rho_3$$

όπου ρ_1,ρ_2,ρ_3, οι ακτίνες των κύκλων με κέντρα O_1,O_2,O_3, αντιστοίχως, απ' όπου έχομε: $\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\kappa}{\lambda}\ \kappa\alpha\iota\ \frac{\rho_3}{\rho_2}=\frac{\lambda}{\mu}$ δηλ. οι λόγοι των ακτίνων είναι ρητοί, που είναι τελικά μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχω περιοδικότητα. Για την πρώτη φορά επανόδου, δηλ. για τον χρόνο περιόδου Τ, απαιτείται να ισχύει και η συνθήκη (κ,λ,μ)=1. Σε περίπτωση άρρητης σχέσης των ακτίνων, δεν μπορώ να έχω περιοδικότητα. Το σημαντικό λοιπόν είναι, ότι αν εκκινήσουμε από μια θέση, ανεξαρτήτως χρόνου και ταχύτητας, δεν είναι βέβαιο ότι η θέση αυτή θα επαναληφθεί. Στους καθηγητές επί πλέον επισημάναμε, ότι αν θέσουμε το ερώτημα πιθανοθεωρητικά ως «ποία η πιθανότητα εκκινώντας από τρεις τυχαίες ακτίνες να έχω περιοδικό φαινόμενο» θα φθάσουμε στο λίαν ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι αυτή είναι 0, δεδομένου ότι το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ έχει μέτρο 0, ενώ το $\mathbb{R}$ έχει άπειρο μέτρο. Δηλ. αν θεωρήσουμε την αντίστοιχη γεωμετρική πιθανότητα, τότε: $p(\pi\varepsilon\rho\iota o\delta\iota\kappa o\acute{\upsilon}\,\varphi\alpha\iota\nu o\mu\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon)=\frac{\mu(\mathbb{Q})}{\mu(\mathbb{R})}=0$. Αυτό το συμπέρασμα, επάγει την υπόθεση ότι και οι πιο περίπλοκες κινήσεις πλανητών, αστέρων κτλ δεν είναι ποτέ δυνατόν να είναι απολύτως περιοδικές, πέραν του ότι δεν υπάρχουν σταθερές γραμμικές ταχύτητες και κυκλικές τροχιές. Με την λογική των ρητών προσεγγίσεων, μπορούμε να σκεφθούμε, ότι όλες οι ουράνιες κινήσεις, είναι «περίπου περιοδικά» φαινόμενα και δεν είναι δυνατόν να είναι περιοδικά (ή είναι εξαιρετικά απίθανο να είναι!) Τα «ακριβώς περιοδικά» φαινόμενα φαίνεται να προκύπτουν από επί τούτω κατασκευαστική λογική τροχών με γρανάζια, όπου εκεί εξ ορισμού η σχέση είναι ρητή και η κίνηση περιοδική. (Μηχανισμοί ωρολογίων κτλ)



Σχήμα 2

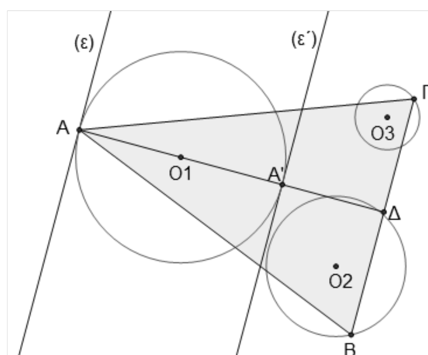
ΜΕΓΙΣΤΟ –ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ:

Όταν δεν γνωρίζουμε την θέση μεγίστου και ελαχίστου, μπορούμε να κάνουμε μόνο εικασία και στην συνέχεια να προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε. Η συνήθης εικασία που μπορεί να κάνει κάποιος σε αυτό, είναι να μεγιστοποιήσει την βάση και το ύψος του τριγώνου. Μια μέγιστη βάση είναι στην διεύθυνση της διακέντρου δύο κύκλων σε λογική αντιδιαμετρικών σημείων και σε μεγιστοποίηση του αντιστοίχου ύψους. Στη δοκιμαστική διδασκαλία του συγκεκριμένου σκέλους του προβλήματος στην Β΄ Λυκείου, αλλά και στην διαπραγμάτευση του ερωτήματος μεταξύ συναδέλφων μαθηματικών, αυτή η

εικασία ήταν η πλέον ευλογοφανής για όλους. Υπάρχουν τρεις τέτοιες θέσεις οι οποίες δεν δίνουν λύση, αφού απλώς αυτή η φαινομενικά εύλογη και παγκοίνως αποδεκτή πρώτη εικασία, απλώς δεν ισχύει. Το μόνο που μπορεί να πάθει κάποιος, είναι να προσπαθεί ανεπιτυχώς να αποδείξει κάτι που δεν αποδεικνύεται. Το λογισμικό αποτρέπει αυτή την λανθασμένη εικασία. Η λύση, τελικά δεν προέκυψε μέσα στην τάξη, αφού όντως πρόκειται για δύσκολο πρόβλημα. Ακόμα και για τους συναδέλφους η λύση προκύπτει σε διαπραγμάτευση στο σπίτι. Γενικά, η κλειστότητα των μαθηματικών διατυπώσεων των Γεωμετρικών προβλημάτων που παραδοσιακά ισχύει, αποτρέπει παντελώς τον λύτη από λανθασμένες εικασίες διατύπωσης. Τέτοιες, διαπράττει συνηθέστατα αυτός που ανακαλύπτει το πρόβλημα, λίγο πριν φθάσει στην λύση του. Με αυτό τον τρόπο, ο ερευνητής μαθηματικός, αυτός που ανακαλύπτει την νέα γνώση, δεν μοιάζει καθόλου με τον μαθητή που αντιμετωπίζει το ίδιο πρόβλημα. Για χιλιετηρίδες, αφαιρείται από τον μαθητή η δυνατότητα λανθασμένης εικασίας κατά την διατύπωση του προβλήματος και αυτή του την επιτρέπει μόνο κατά την απόδειξη. Αυτό έρχεται σε μια οιονεί σύγκρουση με το πνεύμα και την ουσία των νέων εποικοδομητικών θεωριών που επιμένουν στο ότι η μάθηση των μαθηματικών, είναι ενεργητική και κατασκευαστική διαδικασία, που είναι ιδιαίτερη για κάθε μαθητή. [3], [6]. Βεβαίως, δεν είναι δυνατόν όλα τα προβλήματα να έχουν πάντα ανοικτή διατύπωση, διότι υπάρχει το πεπερασμένο και περιορισμένο του χρόνου διδασκαλίας. Το άνοιγμα στην διατύπωση (στην υπόθεση είτε στο συμπέρασμα) μετατρέπει μια άσκηση σε πρόβλημα. Με μια τέτοια έννοια, τα εγχειρίδια Ευκλείδειας Γεωμετρίας ουσιαστικά προέτειναν για επίλυση προτάσεις με κλειστή υπόθεση και κλειστό συμπέρασμα, δηλ. ασκήσεις και όχι προβλήματα. Επομένως, με τις νέες αντιλήψεις, αφού η εικασία στην διατύπωση έχει την θέση της στην κατασκευή της γνώσης , αυτομάτως έχουν θέση και τα δυναμικά υπερεργαλεία Γεωμετρίας (Sketchpad, Cabri, EuclidDraw, Geogebra) τα οποία μπορούν να διαπραγματευτούν παρόμοια και όχι μόνον θέματα, επιτυχέστατα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, σταθεροποιώντας σε τυχαίες θέσεις δύο κορυφές και μεταβάλλοντας την μία κορυφή επί του κύκλο, βρίσκουμε μια θέση μεγίστου εμβαδού. Εν συνεχεία μεταβάλλοντας την άλλη κορυφή με σταθεροποιημένες τις άλλες δύο, ομοίως και την τρίτη κορυφή, έχουμε την θέση μεγίστου εμβαδού. Το σχηματισθέν τρίγωνο μέγιστου εμβαδού, έχει ύψη που διέρχονται από τα κέντρα των κύκλων. Αυτό πρέπει να το εικάσει ο λύτης, να το επαληθεύσει και βεβαίως να το αποδείξει.

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

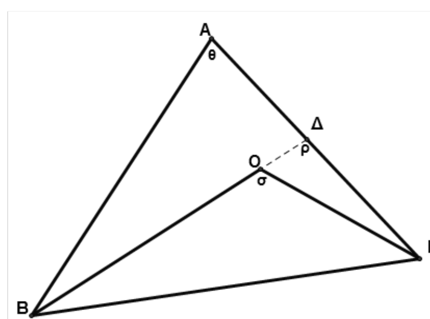
Η πειραματική εύρεση- επαλήθευση της θέσης μεγίστου, ναι μεν χαρακτηρίζεται ως «ισχυρότατη εικασία,» αλλά πάντα είναι εικασία ενώ η αναγκαιότητα της απόδειξης αυτονόητη. Για την απόδειξη, η ίδια η εμπλοκή στην πειραματική εύρεση, μπορεί να περιορίσει και τις λανθασμένες εικασίες για την ίδια την απόδειξη και να οδηγήσει σε ένα ορθό δρόμο γι αυτήν. Ξεκινάμε αντίστροφα από την πειραματική πορεία μεγιστοποίησης. Θεωρούμε μια τυχαία θέση των Α.Β,Γ και μετακινούμε μόνο λ.χ. το Α στην θέση μεγιστοποίησης που είναι αυτή για την οποία η AO_1 είναι ύψος στην πλευρά ΒΓ. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 3, όπου εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε, ότι το Α δίνει το μέγιστο εμβαδόν για οποιαδήποτε μεταβολή του Α επί του κύκλου O_1. Ταυτοχρόνως, προκύπτει και η αντιδιαμετρική θέση Α΄ η οποία δίνει μια υποψία για την θέση του ελαχίστου, το οποίο είναι σε θέση για την οποία τα AO_1, BO_2,ΓO_3, είναι στους φορείς των υψών, χωρίς τα O_1, O_2,O_3,να εμπεριέχονται στις ημιευθείες των υψών και χωρίς αυτοί οι φορείς να συμπίπτουν με τους φορείς των υψών για την θέση του μεγίστου. (Οι ευθείες (ε) και (ε΄) για τις οποίες ισχύει (ε)//(ε΄) //ΒΓ οριοθετούν με την οριζόμενη λωρίδα τους, το μέγιστο και ελάχιστο ύψος για το τρίγωνο με σταθερή βάση ΒΓ) Ομοίως, οι αντίστοιχες θέσεις για τα Β και Γ οριοθετούν μέγιστο και ελάχιστον εμβαδόν για κάθε θέση των Β και Γ επί κάθε κύκλου , απ΄ όπου παίρνουμε τελικά και την απόδειξη για την μεγιστοποιούσα θέση του εμβαδού.



Σχήμα 3

ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ :

Με ακριβώς ανάλογη εργασία με τα προηγούμενα, καταλήγουμε στο ότι οι θέσεις μεγίστης και ελαχίστης περιμέτρου, προκύπτουν όταν οι AO_1, BO_2, ΓO_3 είναι διχοτόμοι των γωνιών των δύο οριζομένων τριγώνων ΑΒΓ. (σχήμα 5) Για την απόδειξη, εφαρμόζουμε την ίδια συλλογιστική με την προηγούμενη περίπτωση. Ξεκινούμε από μια τυχαία θέση ΗΒΓ και θα δείξουμε, ότι καθώς μεταβάλλεται μόνο το Η επί του O_1, η μεγιστοποιούσα την περίμετρο θέση είναι η ΑΒΓ, όταν δηλαδή Η□Α και AO_1, είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.

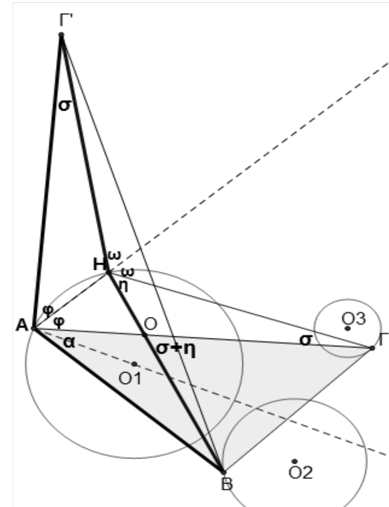


Σχήμα 4

Η απόδειξη θα βασιστεί σε μια γνωστή βοηθητική πρόταση που λέει, ότι αν σε τρίγωνο ΑΒΓ, (σχήμα 4) λάβω εντός του τριγώνου τυχαίο σημείο Ο, τότε

ΑΒ+ΑΓ>ΟΒ+ΟΓ . Από τριγωνική ανισότητα στο τρ.ΑΒΔ, έχω ΑΒ+ΑΔ>ΒΟ+ΟΔ (1) και επίσης από τριγωνική ανισότητα στο τρ. ΔΟΓ έχω ότι ΟΓ>ΔΓ-ΟΔ (2) Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη λαμβάνω το ζητούμενο. Επίσης, ισχύει $\hat{\rho} > \hat{\theta}$ λόγω του ότι ρ εξωτερική και θ εσωτερική γωνία στο τρ. ΑΒΔ και επίσης $\hat{\sigma} > \hat{\rho}$ για τον ίδιο λόγο στο τρίγωνο ΟΔΓ, απ΄ όπου τελικά έχομε $\hat{\theta} < \hat{\sigma}$, που είναι μια αναγκαία μια αναγκαία συνθήκη για κάθε εσωτερικό σημείο Ο του τρ. ΑΒΓ. Στο σχήμα 5, θα δείξω, ότι περ(ΗΒΓ)<περ(ΑΒΓ).

Πρέπει ισοδυνάμως να δείξω, ότι ΗΒ+ΗΓ<ΑΒ+ΑΓ. Φέρω την ΑΗ και βρίσκω τα συμμετρικά ΗΓ΄ του ΗΓ ως προς ΑΗ, όπως και το ΑΓ΄ του ΑΓ ως προς ΑΗ. Από την προρρηθείσα βοηθητική πρόταση, στο τρίγωνο ΑΒΓ΄ αυτό ισχύει. Όμως, αυτό ισχύει για όλα τα σημεία του ελάσσονος τόξου του κύκλου O_1 που ορίζεται από την ΑΓ. Γι αυτά ισχύει $2\hat{\varphi} + \hat{\alpha} < 2\hat{\omega} + \hat{\eta}$. (3) Πράγματι, στο τρίγωνο ΑΗΓ΄ ισχύει, $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\sigma}$ από όπου με αντικατάσταση στην (3) έχω $2\not{\hat{\varphi}} + \hat{\alpha} < 2\not{\hat{\varphi}} + 2\hat{\sigma} + \hat{\eta} \Leftrightarrow \hat{\alpha} < 2\hat{\sigma} + \hat{\eta}$.(4) Όμως, από το τρίγωνο ΗΟΓ, ισχύει $\widehat{\mathrm{B O \Gamma}} = \hat{\eta} + \hat{\sigma}$. Αυτή είναι



Σχήμα 5

εξωτερική γωνία στο τρ. ΑΟΒ, άρα $\hat{\alpha} < \hat{\eta} + \hat{\sigma} \Rightarrow \hat{\alpha} < \hat{\eta} + 2\hat{\sigma}$ που είναι η (4) η αποδεικτέα. Λόγω συμμετρίας, τα ίδια ισχύουν και για τα σημεία του ελάσσονος τόξου που ορίζεται από την ΑΒ, ενώ για τα σημεία του τόξου στο οποίο βαίνει η $\hat{\alpha}$, η απόδειξη συνίσταται σε απλή εφαρμογή της βοηθητικής πρότασης. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με ανάλογη συλλογιστική και για τους άλλους κύκλους και τελικά προκύπτει η μεγιστοποιούσα την περίμετρο θέση, όπως και η θέση ελαχιστοποίησης με όμοια διαδικασία.

Σε μια τέτοια απόδειξη, η γνωστή από το λογισμικό μεγιστοποιούσα θέση, διευκολύνει σε μεγάλο βαθμό την ίδια την απόδειξη. Αν επιχειρήσει κάποιος να προσεγγίσει το θέμα αυτό χωρίς το δυναμικό λογισμικό και χωρίς αναλυτική Γεωμετρία (όπου θα χρειαστεί να βρει ακρότατα συνάρτησης μάλλον με μη λυκειακά μαθηματικά) θα συναντήσει πιθανόν αρκετή δυσκολία. Είναι υποχρεωμένος να σκεφθεί, ότι αν υπάρχει μια τέτοια θέση για το Α, τότε εκατέρωθεν του Α και οσοδήποτε κοντά στο Α, θα πρέπει να ισχύει μια σχέση όπως η (3) για τα όπως φαίνεται στο σχήμα 5 σημεία δεξιά του Α, ενώ για τα αριστερά, μια ανάλογη σχέση με τις γωνίες , δηλ. $2\hat{\varphi} + \hat{\alpha} \leq 2\hat{\omega} + \hat{\eta}$ (3΄) που εμπεριέχει την περίπτωση Α≡Η για το ίσον. Όπως και $180^0\text{-}(2\hat{\varphi} + \hat{\alpha}) \leq 180^0\text{-}(2\hat{\omega}' + \hat{\eta}') \Leftrightarrow 2\hat{\varphi} + \hat{\alpha} \geq 2\hat{\omega}' + \hat{\eta}'(4)$ Σκεπτόμενοι απειροστικά, αν υπάρχει φ : να ισχύουν οι (3΄) και (4) για κάθε α, καθώς η□α και η΄□α, όπως και ω□φ και ω΄□φ. Προφανώς η τιμή είναι αυτή της μέγιστης κυρτής

γωνίας, δηλ. $2\hat{\varphi}+\hat{\alpha}=180^0 \Leftrightarrow \hat{\varphi}+\frac{\hat{\alpha}}{2}=90^0$ και επειδή έχουν θέση εφεξής γωνιών, η ΑΗ είναι η οριακή θέση της εφαπτόμενης στο Α και ΑΟ$_1$ η διχοτόμος της $\hat{A}$. Αυτή η προσέγγιση έγινε μόνο από έναν-δυό καθηγητές. Βεβαίως, στο προηγούμενο μπορεί να φθάσει κάποιος σκεπτόμενος και κλασικά γεωμετρικά , παρατηρώντας, ότι εκατέρωθεν του Α και κοντά στο Α , σχηματίζεται μικρότερη και μεγαλύτερη γωνία στο Η , δηλ. $\widehat{BH'\Gamma'} \leq \widehat{BA\Gamma'} \leq \widehat{BH\Gamma'}$. Για να αρθεί αυτό, θα πρέπει η $\widehat{BA\Gamma'}$ να γίνει ευθεία , οπότε, εκατέρωθεν του Α να έχω μόνο μεγαλύτερες γωνίες.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ –ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

Το πρόβλημα έχει μη τετριμμένη κατασκευή που το ολοκληρώνει, όπως και διερεύνηση, που μπορεί να γίνει πολύ καλύτερα για κάθε Γεωμετρικό πρόβλημα που την απαιτεί, μέσω του δυναμικού λογισμικού. Για παράδειγμα, όταν οι κύκλοι είναι ομόκεντροι έχω άπειρες λύσεις (θέσεις) με το ίδια μέγιστη περίμετρο, οι οποίες προκύπτουν από την περιστροφή μιας λύσης γύρω από το κοινό κέντρο. Όταν έχω δύο ομόκεντρους κύκλους, έχω δύο λύσεις με την ίδια περίμετρο, που προκύπτουν από τα συμμετρικά των δύο κορυφών μιας λύσης ως προς άξονα την διχοτόμο που δεν διέρχεται από το κοινό κέντρο. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για το εμβαδόν.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με την βοήθεια των δυναμικών Γεωμετρικών λογισμικών, το μάθημα της Γεωμετρίας, μπορεί να διδαχθεί ριζικά διαφορετικά και νύξεις περί αυτού, ήδη παραθέσαμε στα προηγούμενα. Συγκεκριμένα:

- Η γνώση, μπορεί να ανακαλυφθεί από τον μαθητή , καθώς το πνεύμα και ο χαρακτήρας σχεδίασης των δυναμικών λογισμικών, είναι προσαρμοσμένα πλήρως στην κοντρουκτιβιστική προσέγγιση της διδασκαλίας. Εδώ αντιμετωπίζουμε ένα ανοικτό πρόβλημα , ανακαλύπτουμε την διατύπωσή του και μετά το λύνουμε, κάτι που σπανιότατα γίνεται στην παραδοσιακή διδασκαλία. Αυτό ήταν έναυσμα γόνιμης συζήτησης με τους καθηγητές για την ποιοτικά διαφορετική προσέγγιση που κάνει το δυναμικό λογισμικό στην ίδια την Γεωμετρία.
- Εκτός από τις εντυπωσιακές δυνατότητες των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών στα προβλήματα γεωμετρικών τόπων, αυτά διαθέτουν και δυνατότητα διερεύνησης προβλημάτων μεγίστου και ελαχίστου. Το συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίσαμε, δεν είναι από τα πιο εύκολα (λ.χ. κανείς μαθητής δεν μπόρεσε να σκεφθεί να βρει το συμμετρικό τμήματος στην απόδειξη) όμως η βοήθεια του λογισμικού , τελικά δεν περιορίζεται στην εύρεση της ορθής εικασίας για την διατύπωση, αλλά ουσιαστικά βοηθά και στην απόδειξη, έπειτα βεβαίως και από σοβαρές ευρετικές νύξεις. Είναι γνωστό, πως παρόμοια

προβλήματα με ακρότατα σε περιμέτρους ευθυγράμμων σχημάτων διαπραγματεύονται με την τεχνική της «ευθειοποίησης» και στην συγκεκριμένη τάξη δεν είχε λυθεί κάποιο παρόμοιο θέμα ποτέ.

- Αναγκαστικά, καθώς υπάρχει κίνηση και δυναμική μεταβολή των μεγεθών, ο μαθητής εμπλέκεται σε απειροστικές λογικές, ενώ το ίδιο το λογισμικό εκ σχεδίασής του, μπορεί να συνδέει στενότερα την κλασική Ευκλείδεια με τον Απειροστικό λογισμό. Αυτή η ιδιότητα, κατά τον Στυλιανό Νεγρεπόντη, αποτελεί την εκ των ων ουκ άνευ προϋπόθεση για την επιβίωση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως Λυκειακού μαθήματος, με όσα θετικά αυτό συνεπάγεται και στα οποία μάλλον συμφωνεί η πλειονότητα της μαθηματικής κοινότητας.
- Εφαρμογές όπως η διαπραγματευθείσα, αναδεικνύουν και τον επιμελώς αποκρυπτόμενο πειραματικό χαρακτήρα της Γεωμετρίας [9] ο οποίος πάντα υπήρχε από την εποχή του Αρχιμήδη και έχει αποτυπωθεί στην επιστολή του ιδίου προς τον Ερατοσθένη [8]. Στην σύγχρονη εποχή, όπου μέσω των νέων παιδαγωγικών θεωριών (Ανακαλυπτική μάθηση, κονστρουκτιβισμός) η μαθηματική ανακάλυψη έρχεται -όσο είναι δυνατόν- κοντά στον μαθητή , η αξία των δυναμικών υπερ-εργαλείων Γεωμετρίας είναι καταλυτική και δίνει στον μαθητή μια πρώτη μύηση στην έρευνα και την μαθηματική ανακάλυψη, η οποία για να παγιωθεί, περνά μέσα από αμφισβήτηση, εικασίες, διαψεύσεις από αντιπαραδείγματα, ανασκευές, επαναδιατυπώσεις κλπ. όπως είναι το υπόδειγμα της μαθηματικής ανακάλυψης [5].
- Είναι βέβαιον, ότι ο χαρακτήρας των δυναμικών λογισμικών Γεωμετρίας, διαφοροποιείται αρκετά και ως προς το παιδαγωγικό και ως προς το διδακτικό σκέλος από την κρατούσα πραγματικότητα των Λυκείων, η οποία σε συνδυασμό με το γνωστό έωλο επιχείρημα «αφού δεν εξετάζεται γιατί να το διδάξω;» δημιουργούν ένα κλίμα απαξίωσης των ΤΠΕ. Ο υπάρχων προγραμματισμός της Πολιτείας με την ολοκλήρωση της επιμόρφωσης στο Β΄ επίπεδο των καθηγητών [10], φαίνεται να αρχίζει να δρομολογεί την οριστική ρήξη με το παρελθόν της παραδοσιακής διδασκαλίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Balacheff, N. & Kaput, J. (1996) Computer- based Learning Environments in Mathematics. In Bishop, A., Clements, K., Keitel, C, Kilpatrick, J. & Laborde, C. *International Handbook of Mathematics Education*. 469- 501.
2. Τουμάσης Μπ. (1999): *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Εκδ. Gutenberg
3. Davis, P. (1995): "The rise, fall, and possible transfiguration of triangle Geometry". *American Mathematical Monthly*, 102(3), 204 – 214.

4. Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Eds), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics* (pp.3-18). London: Lawrence Erlbaum
5. Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer-based environment. In C. Mammana, & V. Villani, (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
6. Lakatos, I.(1996). *Αποδείξεις και Ανασκευές - Η λογική της Μαθηματικής ανακάλυψης»,* Εκδόσεις Τροχαλία Αθήνα.
7. Oldknow A. (1995): "Computer aided research into triangle geometry". *The mathematical Gazette, 79*(485), 263-274
8. Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society.* Cambridge: Harvard University Press
9. Yeh, A.& Nason, R.(2004). Knowledge building of 3D geometry concepts and processes within a virtual reality learning environment. In *Proceedings of Wort Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications* (p 2175-2182). Chesapeake, VA: AACE
10. Αρχιμήδους *«Περί των μηχανικών θεωρημάτων, προς Ερατοσθένην έφοδος»* (3.83.26-3.84.2)
11. Πλατάρος Γιάννης-Παπαδοπούλου Αθηνά (2009) *:«Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση, μέσω των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών»* Πρακτικά 1ου εκπαιδευτικού Συνεδρίου με θέμα «ένταξη και χρήση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία» Βόλος
12. Πρακτικά ημερίδας στις 05/5/2008 για ενημέρωση Επιμορφωτών Β΄ Επιπέδου, Ξενοδοχείο ΤΙΤΑΝΙΑ, Αθήνα .

Γιατί ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων, γίνεται, όπως γίνεται;[1]

(γιατί δηλ. πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή;)

Θέλουμε να εξηγήσουμε τον γνωστό κανόνα του πολλαπλασιασμού κλασμάτων , μιας και πουθενά στα σχολικά βιβλία δεν δίδεται κάποια ικανοποιητική εξήγηση , πέραν μιας εμπειρικής επαληθεύσεως

Πρώτα πρέπει να γίνει κατανοητό, ότι :

Όταν γράφουμε $\frac{\kappa}{\lambda}$ με κ, λ∈ ℕ , εννοούμε, ότι έχουμε πάρει μια μονάδα, την έχουμε χωρίσει σε λ ίσα μέρη, έκαστο των οποίων συμβολίζουμε με $\frac{1}{\lambda}$ και έχουμε λάβει κ το πλήθος από αυτά τα μέρη . Δηλ.

$$\underbrace{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}+\ldots\frac{1}{\lambda}}_{\kappa \text{ το πλήθος } \frac{1}{\lambda}}=\kappa\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{\kappa}{\lambda} \qquad (1)$$

Κατά δεύτερο λόγο, πρέπει να εξηγηθεί η παρακάτω σειρά ισοδυναμιών:

$$1\cdot 1=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\nu}{\nu}\cdot\frac{\mu}{\mu}=1 \Leftrightarrow (1)$$

$$\nu\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\mu\cdot\frac{1}{\mu}=1 \Leftrightarrow (\text{αντιμεταθετική} \,\&\, \text{προσεταιριστική})$$

$$\nu\cdot\mu\left(\frac{1}{\nu}\cdot\frac{1}{\mu}\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\nu}\cdot\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\nu\cdot\mu} \qquad (2)$$

Επίσης, $\frac{\kappa}{\nu}\cdot\frac{\lambda}{\mu}\underset{(1)}{=}\kappa\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\lambda\cdot\frac{1}{\mu}\underset{(2)}{=}\kappa\cdot\lambda\cdot\frac{1}{\nu\cdot\mu}\underset{(1)}{=}\frac{\kappa\cdot\lambda}{\nu\cdot\mu}$ *ό.έ.δ.*

Τα παραπάνω, μπορούν να εξηγηθούν και εποπτικά –γεωμετρικά με χρήση εμβαδού ορθογωνίου ή (ειδικότερα) τετραγώνου πριν πάμε στο ορθογώνιο. Ας ξεκινήσει ο αναγνώστης με ένα τετράγωνο πλευράς ν∈ ℕ και ας αναζητηθεί τι σημαίνει το $\frac{1}{\nu}\cdot\frac{1}{\nu}$ και με τι ισούται σύμφωνα με την γεωμετρική εποπτεία.

---

[1] Ο λόγος αυτού του μαθηματικού σχολίου, είναι το γεγονός της μη ύπαρξης ικανοποιητικής εξήγησης για τον «κανόνα πολλαπλασιασμού κλασμάτων» **σε κανένα** διδακτικό βιβλίο Δημοτικού, Γυμνασίου ή Λυκείου. Επίσης , δεν υπάρχει λόγος να γίνει αυτό αντιληπτό στην στοιχειώδη Θεωρία Ομάδων ως άσκηση του τύπου $(\alpha\cdot\beta)^{-1}=\beta^{-1}\cdot\alpha^{-1}$ με τα α, β στοιχεία μιας ομάδος G

ΜΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΛΑΘΗ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γιάννης Π. Πλατάρος

Περίληψη: *Τα λάθη στα μαθηματικά έχουν και γλωσσικό χαρακτήρα . Κακή απόδοση της ξένης ορολογίας αλλά και παραποίηση της εντόπιας είναι οι δύο κύριες πληγές . Οι δάσκαλοι των μαθηματικών οφείλουν να συμφωνήσουν στην διαπίστωση των λαθών και να τα εξαλείψουν.*

Εισαγωγή: Τα μη μαθηματικά λάθη των μαθηματικών συνίστανται σε λάθη ορθογραφικά, γραμματικά (βαρβαρισμοί) συντακτικά (σολοικισμοί) εννοιολογικά (κακή μεταφορά-απόδοση της ξένης ορολογίας) αλλά και σε παρανοήσεις από εξωμαθηματικές εκφράσεις , σε αδυναμία της γλώσσας κ.ά. Κάποια μεμονωμένα λάθη ή και χαρακτηριστικοί αντιπρόσωποί τους είναι τα εξής:

«Πραγματική Ανάλυση, μιγαδικό επίπεδο, πραγματική ευθεία, γραφικός υπολογιστής, γραφικό περιβάλλον , γραφική λύση.» Οι εκφράσεις αυτές δεν στέκουν ορθά , αφού νοηματικά πρόκειται αντιστοίχως για Ανάλυση πραγματικών, επίπεδο μιγαδικών, ευθεία πραγματικών, περιβάλλον γραφικών και λύση με γραφική παράσταση . Πρόκειται πιθανόν για ομοιότροπη απόδοση των Real analysis , Complex plane , real axis , graphical calculator , graphical solution .

«Η ανάκλαση είναι γεωμετρικός μετασχηματισμός» . Όμως , ο «κατοπτρισμός» είναι γεωμετρικός μετασχηματισμός, αφού ανάκλαση=(ανά +κλάω) (=σπάω) και υποδηλώνει το «σπάσιμο» της ακτίνας φωτός , δηλ. την αλλαγή κατεύθυνσης.

«Η ευθεία y=αχ+β , για α>0 ανεβαίνει» . Πρόκειται για αντιπρόσωπο τεράστιας κλάσης λαθών όπου για λόγους διδακτικούς ή εκλαϊκευτικούς χρησιμοποιούνται εξωμαθηματικές εκφράσεις. Ακόμα κι όταν χρησιμοποιηθεί η φράση «ανεβαίνει από τα αριστερά προς τα δεξιά» , πάλι η έννοια της αύξουσας συνάρτησης δεν εμπεδώνεται σωστά , αφού ο μόνος τρόπος να εμπεδωθεί σωστά μια έννοια , είναι να καλυφθεί πλήρως με αντιπροσωπευτικά παραδείγματα και αντιπαραδείγματα

«Η πλειοψηφία των συναρτήσεων είναι ασυνεχείς» . Αφού όμως οι συναρτήσεις δεν ψηφίζουν , πρέπει να ομιλούμε για πλειονότητα. Κι έτσι όμως, πρόκειται για απειροσύνολα , οπότε και η έννοια της πλειονότητας έχει προβλήματα. Επίσης , **οι προστακτικές των ρημάτων ,** είναι

συχνότατα λάθη στον προφορικό λόγο , αλλά εσχάτως και στον γραπτό. Λένε και γράφουν «υπέγραψε», «ανέλυσε», «διέγραψε», «εξέφρασε», «περιέγραψε», κτλ. αντί για υπόγραψε , ανάλυσε, διάγραψε , έκφρασε , περίγραψε . Για παράδειγμα στο λογισμικό Αβάκιο (http://e-slate.cti.gr) υπάρχει η εντολή Logo «διάγραψε» (σε σωστή προστακτική) η οποία δημιουργεί αρκετά προβλήματα και σε ενηλίκους χρήστες μιας και λογικά το λογισμικό δεν κατανοεί το «διέγραψε»

Γραμμικά ανεξάρτητα ή γραμμικώς ανεξάρτητα; Φυσικά και οι δύο τύποι θεωρούνται ισότιμοι στην γλώσσα μας, αλλά η λέξη «γραμμικά» απομονωμένη, έχει δύο σημασίες. Μία ως ουσιαστικό και μία ως επίρρημα , ενώ η λέξη «γραμμικώς» μόνο επιρρηματική σημασία. Αυτό το πλεονέκτημα οδηγεί σε πρόκριμα χρήσης της επιρρηματικής κατάληξης –ως

Λάθη στα αριθμητικά: «Της μίας » , αντί της μιάς «τον έναν» αντί τον ένα , «τρακόσα» αντί για τριακόσια , «στις μία» αντί στη μία «το τραίνο των μία» ή «το τραίνο των τέσσερις» αντί το τραίνο της μιάς ή των τεσσάρων .

Άλλα λάθη: «μεγενθύνω» και «μεγένθυση» αντί μεγεθύνω και μεγέθυνση . «του εμβαδόν» αντί του εμβαδού (ευτυχώς σπάνιο λάθος) «παρανομαστής» αντί παρονομαστής , «του μηδέν» αντί του μηδενός , «να διαβάσετε μέχρι την σελίδα 98» αντί να διαβάσετε μέχρι **και** την σελίδα 98 , «πιθανά» αντί πιθανώς ή πιθανόν και βεβαίως το συχνό λάθος, όπου το ουσιαστικό «λάθος» χρησιμοποιείται ως επιθετικός προσδιορισμός και ομιλούμε για «λάθος λύση» «λάθος άποψη» , αντί για λανθασμένη λύση, λανθασμένη άποψη. Λέγεται ακόμη «Η ομάδα έχει σωθεί μαθηματικά» , αντί «έχει σωθεί πιθανοθεωρητικά» . Ακόμη λένε «10 τα εκατό» αντί «10 τοις εκατό». Η ίδια φράση μπορεί να λεχθεί και ως «τα εκατό 10» έτσι όμως η έννοια συμπίπτει με το 90% (!).Λέμε ακόμη **«τρισδιάστατος χώρος»** . Όμως το σωστό είναι «τριδιάστατος» χωρίς «σ» όπως λέμε μονοδιάστατος, δι-διάστατος , τρι-διάστατος ,τετρα-διάστατος ,πολύ-διάστατος , απειροδιάστατος.

<u>Συμπεράσματα:</u> Γραμματικά λάθη, λανθασμένες αποδόσεις όρων, εξωμαθηματικές εκφράσεις, υποδαυλίζουν την ίδια την διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς αυτά υποβάλουν ένα συνεπές τέλειο υπόδειγμα , που έρχεται αντικειμενικά σε αντίθεση με αυτά. Η ακριβολογία των μαθηματικών επιβάλει πρώτα από όλα ακριβολογία στην γλώσσα γι αυτό και οι μαθηματικοί έχουν κατά κανόνα ιδιαίτερη ευαισθησία και σε αυτά .

Διαδικτυακές αναφορές:

1. http://www.phys.uoa.gr/~nektar/history/language/lingual_remarks.htm
2. http://tovima.dolnet.gr/print_article.php?e=B&f=13899&m=S16&aa=2